

4. Übungsblatt Topologie WS 2013/14 (Weiss)

Bezeichnung: Das Element $(1, 0, 0, \dots)$ von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wird auch mit $*$ bezeichnet; es ist der *Grundpunkt* in S^n (womit eigentlich gar nichts gesagt ist). Ich verwechsle gerne $*$ (Element von S^n) mit $\{*\}$ (Teilmenge von S^n).

1. Sei $n > 0$ fest gewählt. Es gibt eine stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow S^n$, bei der $f^{-1}(*) = S^{n-1}$ ist, während $f^{-1}(\{v\})$ für jedes $v \neq *$ genau ein Element hat. (Genauer erklären.) Dann haben wir auch eine stetige Abbildung

$$D^n \times D^n \rightarrow S^n \times S^n$$

durch $(v, w) \mapsto (f(v), f(w))$. Einschränken dieser Abbildung gibt eine stetige Abbildung $u: A \rightarrow B$, wobei $A = (S^{n-1} \times D^n) \cup (D^n \times S^{n-1}) \subset D^n \times D^n$ und $B = (S^n \times *) \cup (* \times S^n) \subset S^n \times S^n$ ist. (Erklären, warum A homöomorph zu S^{2n-1} ist.)

- a) Zeigen: u ist genau dann nullhomotop, wenn es eine stetige Abbildung $g: S^n \times S^n \rightarrow B$ gibt, deren Einschränkung auf B die Identität ist. (*Wir werden später mal mit Hilfe von Homologie und Kohomologie sehen, dass es so ein g nicht gibt.*)
- b) $p \circ u$ und $q \circ u$ sind nullhomotop, wobei $p, q: B \rightarrow S^n$ gegeben sind durch $p(v, *) = v$, $p(*, w) = *$, $q(v, *) = *$, $q(*, v) = v$.

2. Zeigen: wenn S^{n+1} nicht zusammenziehbar ist, dann ist S^n auch nicht zusammenziehbar.

3. Zeigen, dass die Projektion von D^2 nach D^1 (gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto x_1$) eine Faserung ist (das heisst, hat die HLP), aber kein Faserbündel.

4. Gegeben topologische Räume A, B, E . Sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung (das heisst, p hat die HLP) und sei $g: A \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Zeigen, dass $q: g^*E \rightarrow A$ auch eine Faserung ist. (Dabei ist wie üblich g^*E das Pullback/Faserprodukt

$$g^*E = \{(x, y) \in A \times E \mid g(x) = p(y)\},$$

ein Unterraum von $A \times E$, und q ist definiert durch $q(x, y) = x$.)

Alles zur Abgabe am Donnerstag 14.11. vor 12:00. Punkte: 15+5, 8, 15, 7.