14.11.2013

# 5. Übungsblatt
# Topologie WS 2013/14 (Weiss)

**1.** Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe[1] auf einem topologischen Raum $X$.

- Sei $W$ eine feste offene Teilmenge von $X$. Sei $\mathcal{F}_W(U) := \mathcal{F}(W \cap U)$ für beliebige offene Teilmengen von $U$. Dann ist $\mathcal{F}_W$ eine Prägarbe auf $X$ (genauer erklären). Ist $\mathcal{F}_W$ im Allgemeinen wieder eine Garbe?
- Für offenes $U \subset X$ sei $\mathcal{G}(U) = \mathcal{P}(\mathcal{F}(U))$, Menge aller Teilmengen von $\mathcal{F}(U)$. Eine Einschränkungsabbildung $\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$ kann folgendermassen definiert werden: Für $S \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(V))$, also $S$ Teilmenge von $\mathcal{F}(V)$, ist $\mathrm{res}_{V,U}(S)$ das Bild von $S$ unter der Abbildung $\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Damit wird $\mathcal{G}$ zu einer Prägarbe auf $X$. Ist $\mathcal{G}$ im Allgemeinen wieder eine Garbe?

**2.** Gegeben topologische Räume $X$ und $Y$, wobei $X$ metrisierbar sein soll. In der Vorlesung wurde die Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $X$ definiert durch $\mathcal{F}(U) = [U, Y]$ besprochen.[2] Es war schon gezeigt worden, dass $\mathcal{F}$ im Allgemeinen keine Garbe ist. Sie sollen trotzdem zeigen:

- Wenn $U_1$, $U_2$ offene Teilmengen von $X$ sind und $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ gegeben sind mit der Eigenschaft $s_{1|U_1 \cap U_2} = s_{2|U_1 \cap U_2} \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$, dann existiert $s \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$ mit den Eigenschaften $s_{|U_1} = s_1$ und $s_{U_2} = s_2$.

Bemerkung dazu: Dieses $s$ wird im Algemeinen nicht eindeutig sein, und das war schon in der Vorlesung an einem Beispiel gezeigt worden. Hinweis dazu: offene Teilmengen von metrisierbaren Räumen sind auch metrisierbar. An Zerlegungen der Eins oder Tietze-Urysohn denken.

**3.** Sei $Y$ ein fest gewählter topologischer Raum. Für einen topologischen Raum $X$ (weniger fest) sei $\mathcal{F}(X)$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul, der von der Menge der stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$ erzeugt wird.[3] Eine stetige Abbildung $u \colon X_0 \to X_1$ bestimmt einen Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln $u^* \colon \mathcal{F}(X_1) \to \mathcal{F}(X_0)$ durch Zusammensetzen mit $u$, also

$$\sum_i a_i f_i \mapsto \sum_i a_i (f_i \circ u)$$

wobei die $a_i \in \mathbb{Z}$ und die $f_i$ stetige Abbildungen von $X_1$ nach $Y$ sind. Dadurch wird $\mathcal{F}$ ein kontravarianter Funktor.[4] Jetzt das Problem: Gegeben topologischer

[1] Garbe = sheaf; bitte Definition aus meinen Vorlesungsnotizen benutzen. Andere würden dafür vielleicht sagen: Garbe von Mengen, sheaf of sets.

[2] Dabei ist $U$ eine beliebige offene Teilmenge von $X$ und $[U, Y]$ bezeichnet die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von $U$ nach $Y$. Für offene $U, V \subset X$ mit $U \subset V$ ist die Einschrűkungsabbildung $\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Zusammensetzen mit der Inklusion $U \to V$. Statt $\mathrm{res}_{V,U}(s)$ schreiben wir auch gerne $s_{|U}$, wenn $s \in \mathcal{F}(V)$.

[3] Etwas einfacher gesagt, die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ sind formale Linearkombinationen, mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, von stetigen Abbildungen von $X$ nach $Y$, also beispielsweise $3f - 4g + 6h$ wobei $f, g, h \colon X \to Y$ stetige Abbildungen sind.

[4] Von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln.

Raum $\mathsf{X}$. Gegeben seien $\mathsf{s}_+ \in \mathcal{F}(\mathsf{X}\times[0,\infty[\,)$ und $\mathsf{s}_- \in \mathcal{F}(\mathsf{X}\times\,]-\infty,0]\,)$ derart, dass die Einschränkungen[5] von $\mathsf{s}_+$ und $\mathsf{s}_-$ in $\mathcal{F}(\mathsf{X}\times\{0\})$ übereinstimmen. Existiert dann $\mathsf{s} \in \mathcal{F}(\mathsf{X}\times\mathbb{R})$ derart, dass $\mathsf{s}$ nach Einschränken auf $\mathsf{X}\times\,]-\infty,0]$ mit $\mathsf{s}_-$ übereinstimmt und nach Einschränken auf $\mathsf{X}\times[0,\infty[$ mit $\mathsf{s}_+$ ?
Hinweis: Sie können in der Arbeit an diesem Problem bis zu drei Stufen der Erkenntnis durchlaufen. Auf jeden Fall ist ungehemmter Optimismus die erste Stufe.

*Alles zur Abgabe am Donnerstag 21.11. vor 12:00. Punkte: 12+12, 14, 12.*

[5] Einschränkung bedeutet hier $\mathsf{j}^*$, wobei $\mathsf{j}$ eine der Inklusionen $\mathsf{X}\times\{0\}\to\mathsf{X}\times[0,\infty[$ bzw. $\mathsf{X}\times\{0\}\to\mathsf{X}\times\,]-\infty,0]$ bezeichnet.