21.11.2013

6. Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. In den Vorlesungsnotizen Woche 5 (Example 4.14) werden unter Anderem zwei Beispiele von kontravarianten Funktoren angegeben.

(1) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ und Objekt x in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{S}\mathrm{ets}$ definiert durch $F(c) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, x)$ für Objekt c von $\mathcal{C}$, usw.

(2) Ein kontravarianter Funktor P von $\mathcal{S}\mathrm{ets}$ nach $\mathcal{S}\mathrm{ets}$ ist definiert durch $P(S) =$ Potenzmenge von S, usw.

Es wird angedeutet, dass das zweite Beispiel so etwas wie ein Spezialfall vom ersten Beispiel ist. Warum ist das so? (Vielleicht eine gute Gelegenheit, die Vokabel(n) *natürliche Transformation* anzubringen.)

2. Sei X ein topologischer Raum. Für eine offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der offenen Teilmengen von X, die in U enthalten sind; also

$$\mathcal{F}(U) = \{ W \mid W \text{ offen in } X \text{ und } W \subset U \}.$$

Für offene Teilmengen U, V von X mit $U \subset V$ definieren wir

$$\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

durch $W \mapsto W \cap U$ für $W \in \mathcal{F}(V)$. Dadurch wird $\mathcal{F}$ zu einer Prägarbe auf X. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe?

3. Sei X die Vereinigung der Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$, topologisiert als Unterraum von $\mathbb{R}^2$. In den Vorlesungsnotizen Woche 6 (Example 5.4) wird eine Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X mitsamt ihren Halmen $\mathcal{G}_z$ beschrieben. Für offenes $U \subset X$ ist $\mathcal{G}(U)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $X \smallsetminus U$, usw. Es ist klar, dass $\mathcal{G}(X)$ leer ist. Sei $\Phi\mathcal{G}$ die Vergarbung von $\mathcal{G}$. Wieviele Elemente hat $(\Phi\mathcal{G})(X)$?

Alles zur Abgabe am Donnerstag 28.11. vor 12:00. Punkte: 10, 20, 20.