29.11.2013

7. Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. Gegeben topologische Räume X, Y_1 und Y_2. Mit $Y_1 \coprod Y_2$ wird die disjunkte Vereinigung von Y_1 und Y_2 bezeichnet (als topologischer Raum; eine Teilmenge $W \subset Y_1 \coprod Y_2$ soll offen sein genau denn, wenn $W \cap Y_1$ and $W \cap Y_2$ beide offen sind). Zeigen, dass

$$\begin{array}{rl} & \text{abelsche Gruppe der Abbildungszykel von } X \text{ nach } Y_1 \coprod Y_2 \\ \cong & (\text{abelsche Gruppe der Abbildungszykel von } X \text{ nach } Y_1) \\ & \times(\text{abelsche Gruppe der Abbildungszykel von } X \text{ nach } Y_2). \end{array}$$

(Dabei steht das Zeichen $\cong$ für *isomorph als abelsche Gruppen.*) Diese Behauptung kommt in den Vorlesungsnotizen (Woche 6) vor, en Beweis ist aber da nicht ausgeschrieben.

2. Sei S die Menge der stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und A_S die von S erzeugte freie abelsche Gruppe[1]. Es wird als bekannt/verstanden vorausgesetzt, dass jedes Element von A_S einen Abbildungszykel von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bestimmt.[2] Beispiel geben von zwei verschiedenen Elementen von A_S, die denselben Abbildungszykel von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bestimmen.

3. Zeigen, dass

$$\begin{array}{rcl} [[S^m \times S^n, Y]]/[[\star, Y]] & \cong & [[S^m, Y]]/[[\star, Y]] \\ & & \times[[S^n, Y]]/[[\star, Y]] \\ & & \times[[S^{m+n}, Y]]/[[\star, Y]]\ . \end{array}$$

[Hier soll Y irgendein topologischer Raum sein, und m, n sind *positive* ganze Zahlen. Das Zeichen $\cong$ bedeutet *isomorph als abelsche Gruppen.* In Vorlesungsnotizen Woche 7 wird erklärt, wie $[[\star, Y]]$ als Untergruppe von $[[S^m, Y]]$ aufgefasst werden kann. Mit demselben Argument kann $[[\star, Y]]$ als Untergruppe von $[[X, Y]]$ aufgefasst werden, wann immer X ein nichtleerer topologischer Raum ist.]
[*Hinweise.* Es ist erstmal wichtig, sich Grundpunkte $a \in S^m$ und $b \in S^n$ auszusuchen. Dan hat $S^m \times S^n$ auch einen Grundpunkt: (a, b). Es gibt eine Abbildung $S^m \to S^m$, die homotop zur Identität ist und ausserdem eine Umgebung von a nach a abbildet. Ebenso mit S^n und b. Durch Zusammensetzen mit solchen und ähnlichen Abbildungen kann man manchmal "ungünstige" Repräsentanten von Elementen von $[[S^m \times S^n, Y]]$ oder $[[S^m, Y]]$ oder $[[S^n, Y]]$ durch "günstige" ersetzen.]

Alles zur Abgabe am Donnerstag 5.12. vor 12:00. Punkte: 15, 15, 20.

[1] Anders gesagt: ein Element von A_S ist eine formale Linearkombination, mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, von stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

[2] Dieses "Bestimmen" ist eigentlich eine Spezialisierung von $\eta\colon \mathcal{F} \to \Phi\mathcal{F}$ in Proposition 5.6, Vorlesungsnotizen Woche 6.