12.12.2013

9.Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

Bezeichnungen: Für topologische Räume X, Y mit Grundpunkten $\star \in X$ und $\star \in Y$ kann man $X \vee Y$ definieren als den Unterraum von $X \times Y$ bestehend aus allen (x, y) bei denen entweder $x = \star$ oder $y = \star$ (oder beides) zutrifft. Name: Einpunktsumme, Wedge-Produkt und vieles mehr. Für diese Operation gilt Assoziativität, d.h. $(X \vee Y) \vee Z$ ist (auf naheliegende Weise) homöomorph zu $X \vee (Y \vee Z)$ usw. Es gibt injektive stetige Abbildungen $j_1 \colon X \to X \vee Y$ und $j_2 \colon Y \to X \vee Y$, wobei $j_1(x) = (x, \star)$ und $j_2(y) = (\star, y)$. Es gibt Standard-Projektionen $p_1 \colon X \vee Y \to X$ und $p_2 \colon X \vee Y \to Y$. Statt j_1, j_2, p_1, p_2 kann man auch j_X, j_Y, p_X und p_Y schreiben.

1. (a) $H_n(S^n \vee S^n \vee S^n)$ ausrechnen (für jedes $n \geq 1$). Wie sehen die Homomorphismen $j_{k*} \colon H_n(S^n) \to H_n(S^n \vee S^n \vee S^n)$ und $p_{k*} \colon H_n(S^n \vee S^n \vee S^n) \to H_n(S^n)$ aus, wobei $k = 1, 2, 3$?

(b) Zeigen: Es gibt eine stetige Abbildung $u \colon S^n \to S^n \vee S^n \vee S^n$, so dass $p_k \circ u$ homotop zur Identität von S^n ist, für $k = 1, 2, 3$. Wie sieht der Homomorphismus $u_* \colon H_n(S^n) \to H_n(S^n \vee S^n \vee S^n)$ aus?

(c) Sei $f \colon S^n \vee S^n \vee S^n \to S^n$ die stetige Abbildung, die durch $f \circ j_k = \mathrm{id}$ für $k = 1, 2, 3$ festgelegt ist. Zeigen: $f \circ u \colon S^n \to S^n$ hat den Grad 3 im Sinne von Vorlesungsnotizen Woche 9 (also $\deg(f) = 3$ auf Englisch).

(d) Im Fall $n = 1$ soll auch gezeigt werden, dass $f \circ u$ den Grad 3 im Sinn von Vorlesungsnotizen Woche 1 hat.

(e) Wie kann man zeigen, dass eine stetige Abbildung $g \colon S^1 \to S^1$, die den Grad -3 im Sinne von Vorlesungsnotizen Woche 1 hat, auch Grad -3 im Sinne von Vorlesungsnotizen Woche 9 hat?

Alles zur Abgabe am Donnerstag 19.12. vor 12:00. Punkte: 15+10+5+10+10.