31.01.2014

Übungsblatt zur Klausurvorbereitung Topologie WS 2013/14 (Weiss)

Information zur Klausur: Es wird wahrscheinlich 5 bis 6 Aufgaben geben zu den folgenden drei grösseren Bereichen.

I Elementare Homotopietheorie (einschliessl. Faserbündel und Faserungen).

II Abstrakter Aufbau der Homologietheorie (einschl. elementare Resultate aus der Garbentheorie, die dabei benutzt wurden) und erste Anwendungen: Grad von Abbildungen $S^n \to S^n$, einige Fixpunktsätze, hairy ball theorem (=Satz vom Igel).

III Kombinatorische Modelle von Räumen (Eckenschemata und simpliziale Komplexe, semi-simpliziale Mengen und ihre geometrischen Realisierungen) und ihre Homologie, ausgedrückt durch Kettenkomplexe.

Der Satz $H_*(|Y|) \cong H_*(C(Y))$, wobei Y semi-simpliziale Menge, soll/kann unter III vorkommen, und vielleicht sogar Einzelheiten vom Beweis, soweit sie in der Vorlesung geliefert wurden ... obwohl wegen misslungener Vorbereitung der Beweis in der Vorlesung skizzenhaft geriet. Dagegen soll *Kohomologie* nicht vorkommen, obwohl dieser Begriff vor längerer Zeit ordnungsgemäss definiert wurde.
Abfragen von Definitionen: ja, damit muss gerechnet werden. Aufgaben, die von den Übungsblättern kommen, oder Bruchstücke von solchen: ja, damit muss auch gerechnet werden.
Von den 5 oder 6 Aufgaben sollen aber nur maximal 4 pro Person ausgewählt/gewertet werden (wenn jemand mehr als 4 bearbeitet, werden bei der Beurteilung nur die besten 4 berücksichtigt); ausserdem sollen 3 perfekte Lösungen schon die maximal erreichbare Punktzahl geben (d.h. Überschuss wie zB bei 4 perfekten Lösungen wird vernachlässigt).

Übungen zur Klausurvorbereitung: ... es soll in den nächsten Tagen noch mehr dazukommen.

1. Die Bestimmung von $[S^1, S^1]$ kann man auch so zusammenfassen.

(i) Es ist egal, ob wir stetige Abbildungen $S^1 \to S^1$ bis auf Homotopie klassifizieren, *oder* stetige Abbildungen $f\colon S^1 \to S^1$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $f(1) = 1$ bis auf Homotopien $(h_t)_{t\in[0,1}$, bei denen $h_t(1) = 1$ gilt für alle $t \in [0, 1]$. Warum ist es egal?

(ii) Stetige Abbildungen $f\colon S^1 \to S^1$ mit $f(1) = 1$ *entsprechen* stetigen Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi(t + 1) - \varphi(t) \in \mathbb{Z}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wie geht das? Da gibt es eine Bijektion. Bemerken, dass die Differenz $\varphi(t+1)-\varphi(t)$ nicht von t abhängt, nur von φ. Also Name dafür: $n_\varphi \in \mathbb{Z}$.

(iii) Zwei stetige Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften wie in (ii) sind homotop, wenn $n_\varphi = n_\psi$, und zwar kann man dann eine Homotopie $(h_t)_{t\in[0,1]}$ so angeben, dass jedes $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch die Eigenschaften in (ii) hat.

(iv) Aus alledem folgt leicht eine Bijektion zwischen $[S^1, S^1]$ und $\mathbb{Z}$.

2. Sei $p : E \to B$ ein Faserbündel, wobei B zusammenhängend. Sei $(U_i)_{i\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von B, und dazu sei gegeben für jedes $i \in \Lambda$ eine Bündelkarte

$$h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$$

wobei F ein fester topologischer Raum ist, unabhängig von i. (Wenn nötig, Definition *Bündelkarte* nachschauen.) Man sagt dann gerne: $p : E \to B$ *ist ein Faserbündel mit Faser* F. Sei $U_{ij} = U_i \cap U_j$ für $i, j \in \Lambda$, und $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ für $i, j, k \in \Lambda$.

(i) Aus den Bündelkarten h_i für p lässt sich extrahieren: für jedes $(i, j) \in \Lambda \times \Lambda$ ein Homöomorphismus $\alpha_{ij} : U_{ij} \times F \to U_{ij} \times F$. Dieses α_{ij} soll ausdrücken, wie sich die Bündelkarten h_i und h_j unterscheiden da, wo sie verglichen werden können. Demnach soll α_{ij} eine Abbildung über U_{ij} sein, also $q \circ \alpha_{ij} = q$, wobei q die Projektion von $U_{ij} \times F$ nach U_{ij} ist. Ausserdem ist $\alpha_{ii} = \mathrm{id}$ für alle $i \in \Lambda$.

(ii) Es gilt $\alpha_{jk} \circ \alpha_{ij} = \alpha_{ik}$, wo es sinnvoll ist, nämlich in $U_{ijk} \times F$. (Wenn es bei Ihnen andersherum herauskommt, zurück zu (i) und Definition von α_{ij} leicht abändern.)

(iii) Umgekehrt: gegeben kein Faserbündel $p : E \to B$, sondern nur eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in\Lambda}$ von B und Homöomorphismen $\alpha_{ij} : U_{ij} \times F \to U_{ij} \times F$ mit Eigenschaften wie in (i) und (ii). Dann wird dadurch ein Faserbündel definiert mit Grundraum B und Faser F, usw. usw.

(iv) Obenstehendes ausprobieren mit $p : E \to B$ gleich Hopf-Faserbündel, also $E = S^3$ und $B = S^2$. Die offene Überdeckung soll sein: $U_1 = S^2 \smallsetminus \{a\}$, $U_2 = S^2 \smallsetminus \{b\}$, wobei $a = (0, 0, 1)$ und $b = (0, 0, -1)$ oder ähnlich. Wie sieht α_{12} aus?

(v) Nochmal Obenstehendes ausprobieren mit $B = S^2$,

$$E = \{(v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid v \cdot w = 0,\ \|v\| = \|w\| = 1\}$$

und $p(v, w) = v$. Kann man so zeigen, dass die Faserbündel in (iv) und (v) mit Grundraum S^2 und Faser $\cong S^1$ nicht isomorph sind? Wie könnte man es noch zeigen? (Hinweis: wie ist es mit den Totalräumen?)

2. Sei X ein topologischer Raum. In Übungsblatt 6 Aufgabe 2 wurde eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X definiert, die sich später als Garbe erwies. Sei $\mathcal{E}$ irgendeine andere Garbe auf X. Man zeige, dass die Garbenmorphismen von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$ den *Teilgarben* von $\mathcal{E}$ entsprechen (durch eine geeignete Bijektion). Das $\mathcal{F}$ ist also eine ganz besondere Garbe. $\longrightarrow$

(Dazu müsste noch die Definition von *Teilgarbe/Untergarbe* geliefert werden. Erfinden Sie das mal; dabei kann man nicht viel falsch machen.)
Hinweis: Sie sollten unbedingt zuerst den Fall betrachten, in dem X ein Punkt ist. Was ist dann eine Garbe $\mathcal{E}$ auf X ? Was bedeutet *Teilgarbe* in diesem Fall? Wie sieht die Garbe $\mathcal{F}$ aus?

3. Narrenhut: das ist $|Y|$, wobei Y die semi-simpliziale Menge ist, bei der Y_2, Y_1 und Y_0 je ein Element haben, $Y_n = \emptyset$ für $n > 2$.

(i) Wie sieht $|Y^{\leq 1}|$ aus ?

(ii) Zum einzigen Element $z \in Y_2$ gehört eine charakteristische Abbildung $c_z \colon \Delta^2 \to |Y|$. Wenn man c_z auf den Rand von Δ^2 einschränkt, hat man eine stetige Abbildung $e \colon \partial\Delta^2 \to |Y^{\leq 1}|$. Wie sieht die aus? Zeigen, dass sie eine Homotopieäquivalenz ist.

(iii) Man wähle $f \colon |Y^{\leq 1}| \to \partial\Delta^2$, homotopie-invers zu e, und eine Homotopie von $f \circ e$ nach id. Damit kann man (vielleicht, mit Anstrengung) zeigen, dass $|Y|$ zusammenziehbar ist.

4. In Aufgabe 2 von Übungsblatt 11 und speziell in meiner Musterlösung kam eine semi-simpliziale Menge Y vor, bei der Y_2 genau ein Element hat (usw. usw.) und $|Y|$ homöomorph zum kompakten Möbiusband ist. Ich konnte es selber kaum glauben, bis ich das Experiment mit Papier, Kleber und Schere gemacht habe. Haben Sie das auch schon versucht?
Hinweis: Man kann das Experiment auf zwei Weisen machen: erstens, Volldreieck aus Papier hernehmen und Kanten nach Vorschrift verkleben (dazu keine Schere nötig); zweitens, erstmal Möbiusband hernehmen (dazu Kleber nötig), dann nach Vorschrift zerschneiden (dazu Schere nötig). Ich empfehle die zweite Methode. Sie werden schon verstehen, warum, wenn Sie es ausprobieren.

5. Semi-simpliziale Menge Y erfinden, so dass $|Y|$ homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. (Man kann es so machen, dass Y_2 genau zwei Elemente hat und Y_0 genau eins. Man kann ungefähr so verfahren, wie ich es bei $\mathbb{R}P^2$ gemacht habe ... nach einigen Korrekturen.) Dann den kombinatorischen Kettenkomplex $C_*(Y)$ hinschreiben und $H_*(|Y|)$ ausrechnen über die Formel $H_*(|Y|) \cong H_*(C(Y))$.

6. Analog zu Aufgabe 5: semi-simpliziale Menge Y erfinden, so dass $|Y|$ eine kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht 2 ist, d.h. Brezeloberfläche. (Man kann es so machen, dass Y_2 genau sechs Elemente hat und Y_0 genau eins.) Dann den kombinatorischen Kettenkomplex $C_*(Y)$ hinschreiben. Ob man jetzt noch $H_*(|Y|)$ ausrechnen kann über die Formel $H_*(|Y|) \cong H_*(C(Y))$ ... ich weiss es nicht, es ist vielleicht zu langwierig.

7. Die semi-simplizialen Menge $Y = \underline{\Delta}^n$ sei so definiert. Für $k > 0$ ist Y_k die Menge der monotonen injektiven Abbildungen von $\{0, 1, \dots, k\}$ nach $\{0, 1, \dots, n\}$. Seitenoperatoren $f^* \colon Y_\ell \to Y_k$ sind gegeben durch Zusammensetzen mit

$$f \colon \{0, 1, \dots, k\} \to \{0, 1, \dots, \ell\},$$

wobei f monoton injektiv angenommen wird. Dann ist also $|Y| \cong \Delta^n$.
Sei jetzt $C = C(Y)$ der kombinatorische Kettenkomplex von diesem Y. Man erfinde Homomorphismen $f_k\colon C_k \to C_{k+1}$ für alle $k \geq 0$ derart, dass

$$\partial_{k+1} \circ f_k + f_{k-1} \circ \partial_k = \mathrm{id}$$

gilt für $k > 0$. Bild:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{k-1} \arrow[l] & C_k \arrow[l, "\partial_k"'] & C_{k+1} \arrow[l, "\partial_{k+1}"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C_{k-1} \arrow[l] \arrow[ur, "f_{k-1}"'] & C_k \arrow[l, "\partial_k"] \arrow[ur, "f_k"'] & C_{k+1} \arrow[l, "\partial_{k+1}"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Daraus leite man her, dass $H_k(C) = 0$ für alle $k > 0$. Was passiert im Fall $k = 0$?

8. Sei $p\colon E \to B$ ein Faserbündel. Wenn $B = S^2$ ist, dann kann man das Faserbündel mit höchstens zwei Bündelkarten beschreiben (d.h. es gibt eine Überdeckung von B mit offenen Teilmengen U_1 und U_2 und Bündelkarten

$$h_i\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times F_i \ ,$$

wobei $i = 1, 2$.) Warum? Ähnlich: wenn $B = \mathbb{R}P^2$ oder $B = \mathbb{C}P^2$, dann kann man das Faserbündel mit höchstens 3 Bündelkarten beschreiben. Warum? Können Sie eine ähnliche obere Schranke angeben für $B = S^1 \times S^1$? *Hinweis zum letzten Teil*: 4 ist nicht die beste Antwort.

9. Man schreibe $S^1 = A \cup B$ wobei $A = S^1 \smallsetminus \{1\}$ und $B = S^1 \smallsetminus \{-1\}$, in komplexer Schreibweise ($S^1 \subset \mathbb{C}$). Wie sieht die Mayer-Vietoris-Folge von Homologiegruppen aus, die zur offenen Überdeckung von S^1 durch A und B gehört?

10. Man schreibe $S^1 \times S^1 = V \cup W$ wobei $V = A \times S^1$ und $W = B \times S^1$, mit A und B wie in Aufgabe 9. Wie sieht die Mayer-Vietoris-Folge von Homologiegruppen aus, die zur offenen Überdeckung von $S^1 \times S^1$ durch V und W gehört?