Ausgewählte Kapitel aus der nichtkommutativen Algebra

Peter Schneider

Vorlesung in Münster, 2000

Inhaltsverzeichnis

Das vorliegende Manuskript enthält den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung in Münster im Jahre 2000. Ziel der Vorlesung war eine möglichst umfassende Darstellung der Theorie der Auslander-regulären Ringe.

Ein herzliches Dankeschön gebührt Frau Ina Reckermann für das sicherlich nicht einfache Texen meiner handschriftlichen Notizen.

In diesem Buch ist R stets ein (assoziativer) Ring mit Eins, und $Z(R)$ bezeichnet sein Zentrum. Mit R-Moduln sind stets unitale R-Linksmoduln gemeint. Wir erinnern daran, daß diese eine *abelsche Kategorie* $\mathrm{Mod}(R)$ bilden, d. h.:

- R-Modulhomomorphismen besitzen Kern, Bild und Cokern,
- der Isomorphiesatz gilt,
- die direkte Summe zweier (hier sogar beliebig vieler) R-Moduln existiert,
- $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist eine abelsche Gruppe (genauer hier ein $Z(R)$-Modul) und die Komposition von Homomorphismen ist diesbezüglich biadditiv (genauer hier $Z(R)$-bilinear).

Teil I
Einiges aus der homologischen Algebra

1 Komplexe

Ein *Komplex* von R-Moduln ist eine Sequenz

$$M^\bullet : \ldots \longrightarrow M^{-1} \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M^q \longrightarrow \ldots$$

von R-Moduln M^q und R-Modulhomomorphismen $d^q : M^q \longrightarrow M^{q+1}$ (den *Corandoperatoren* oder *Differentialen*) mit der Eigenschaft, daß

(1) $$d^{q+1} \circ d^q = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}\ .$$

Der R-Modul

(2) $$h^q(M^\bullet) := \ker(d^q)/\operatorname{im}(d^{q-1})$$

ist somit wohldefiniert und heißt der *q-te Cohomologiemodul* des Komplexes $M^\bullet$.

Ein *Komplexhomomorphismus* $\alpha = \alpha^\bullet : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & M^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0"] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1"] & \cdots \arrow[r] & M^q \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{-1} \arrow[r] & N^0 \arrow[r] & N^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & N^q \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit R-Modulhomomorphismen $\alpha^q : M^q \longrightarrow N^q$.

Es gilt:

* Die Kategorie $C(R)$ der Komplexe von R-Moduln ist wieder abelsch; Kern, Bild und Cokern werden komponentenweise gebildet.

* $\alpha : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ induziert R-Modulhomomorphismen

$$h^q(\alpha) : h^q(M^\bullet) \longrightarrow h^q(N^\bullet) \qquad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $h^q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$,
2) $h^q(\alpha \circ \beta) = h^q(\alpha) \circ h^q(\beta)$,
3) $h^q(\alpha + \beta) = h^q(\alpha) + h^q(\beta)$.

Sei

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{\alpha} M^\bullet \xrightarrow{\beta} N^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $C(R)$. Dann ist der *Verbindungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} \delta^q : h^q(N^\bullet) &\longrightarrow h^{q+1}(L^\bullet) \\ x &\longmapsto y \text{ mit } \beta^q(m) = x, d^q(m) = \alpha^{q+1}(y) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R-Modulhomomorphismus. Folgendes Diagramm veranschaulicht die Abbildungsvorschrift:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^q \arrow[r] \arrow[d] & M^q \arrow[r, "m \mapsto x"] \arrow[d, "m \mapsto \bullet"] & N^q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L^{q+1} \arrow[r, "y \mapsto \bullet"] & M^{q+1} \arrow[r] & N^{q+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Die nächsten beiden Lemmas werden durch naheliegende Diagrammjagden bewiesen.

Lemma 1.1. *Die Sequenz*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow h^\bullet(L^\bullet) \longrightarrow \ldots \longrightarrow h^q(L^\bullet) \xrightarrow{h^q(\alpha)} h^q(M^\bullet) \xrightarrow{h^q(\beta)} h^q(N^\bullet) \\ \xrightarrow{\delta^q} h^{q+1}(L^\bullet) \xrightarrow{h^{q+1}(\alpha)} \ldots \end{aligned}$$

ist exakt.

Lemma 1.2. *Für ein kommutatives exaktes Diagramm von Komplexen*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & N^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \tilde{L}^\bullet \arrow[r] & \tilde{M}^\bullet \arrow[r] & \tilde{N}^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ist auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & h^q(L^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & h^q(M^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & h^q(N^\bullet) \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[d] & h^{q+1}(L^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & h^q(\tilde{L}^\bullet) \arrow[r] & h^q(\tilde{M}^\bullet) \arrow[r] & h^q(\tilde{N}^\bullet) \arrow[r, "\delta^q"] & h^{q+1}(\tilde{L}^\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Definition. *Ein Komplexhomomorphismus* $\alpha : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ *heißt Quasi-Isomorphismus, falls alle* $h^q(\alpha)$ *Isomorphismen sind.*

Dieser Begriff wirft folgendes **Problem** auf: Fixiere einen R-Modul X und betrachte den Funktor

(3) $$\mathrm{Hom}_R(X, .) : \mathrm{Mod}\, R \longrightarrow \mathrm{Mod}(Z(R)) \ .$$

Durch komponentenweises Anwenden setzt er sich fort zu einem Funktor

(4) $$\mathrm{Hom}_R(X, .) : C(R) \longrightarrow C(Z(R)) \ .$$

Da (3) nicht exakt ist, respektiert (4) Quasi-Isomorphismen nicht! Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für eine neue Theorie.

Definition. *Zwei Komplexhomomorphismen* $\alpha, \beta : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ *heißen homotop, wenn* R*-Modulhomomorphismen*

$$s^q : M^q \longrightarrow N^{q-1} \quad \textit{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

existieren mit

$$d^{q-1} \circ s^q + s^{q+1} \circ d^q = \alpha^q - \beta^q \quad \textit{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

(in Zeichen: $\alpha \sim \beta$ *oder* $\alpha \sim_{s^\bullet} \beta$*).*

Lemma 1.3. *Aus* $\alpha \sim \beta$ *folgt* $h^q(\alpha) = h^q(\beta)$ *für alle* $q \in \mathbb{Z}$*.*

Lemma 1.4. *i.* $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

ii. $\alpha_0 \sim \beta_0$ *und* $\alpha_1 \sim \beta_1 \Longrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 \sim \beta_0 + \beta_1$*.*

iii. $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \gamma \circ \alpha \sim \gamma \circ \beta$ *und* $\alpha \circ \gamma \sim \beta \circ \gamma$*.*

Definition. *Ein Komplexhomomorphismus* $\alpha : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ *heißt eine Homotopieäquivalenz (*$M^\bullet$ *und* $N^\bullet$ *heißen dann auch homotopieäquivalent), falls ein Komplexhomomorphismus* $\beta : N^\bullet \longrightarrow M^\bullet$ *existiert mit*

$$\beta \circ \alpha \sim \mathrm{id}_{M^\bullet} \quad \textit{und} \quad \alpha \circ \beta \sim \mathrm{id}_{N^\bullet}$$

(β *heißt ein Homotopieinverses zu* α*).*

Lemma 1.5. *i. Homotopieäquivalenzen sind Quasi-Isomorphismen.*

ii. ein Kompositum von Homotopieäquivalenzen ist eine Homotopieäquivalenz.

Nun gilt das folgende **grundlegende Prinzip:** Sei

$$F : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R')$$

ein Funktor. Er setzt sich fort zu einem Funktor

$$\begin{aligned} F : C(R) &\longrightarrow C(R') \\ (M^\bullet, d^\bullet) &\longmapsto (F(M^\bullet), F(d^\bullet)) \ . \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß F *additiv* ist, d. h. $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$ (z. B. $F = \mathrm{Hom}_R(X, \ .)$). Dann respektiert F Homotopien und folglich Homotopieäquivalenzen.

2 Projektive Auflösungen

Satz 2.1. *Die Kategorie* $\mathrm{Mod}(R)$ *besitzt genügend viele projektive Objekte, d. h. zu jedem R-Modul M gibt es einen projektiven R-Modul P und einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $P \twoheadrightarrow M$.*

Beweis. Wähle ein Erzeugendensystem $\{m_i\}_{i \in I}$ von M und definiere

$$\begin{aligned} F := \oplus_{i \in I} R &\twoheadrightarrow M \\ (r_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_i r_i m_i \ . \end{aligned}$$

Der R-Modul F ist frei und somit insbesondere projektiv. □

Corollar 2.2. *Zu jedem R-Modul M gibt es eine exakte Sequenz von R-Moduln*

$$\ldots \longrightarrow P^q \xrightarrow{d^q} \ldots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \ ,$$

wobei alle P^q für $q \leq 0$ projektive R-Moduln sind.

Eine solche Sequenz heißt eine *projektive Auflösung* des Moduls M. Man sollte sie als einen Quasi-Isomorphismus von Komplexen

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P^q \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

auffassen.

Satz 2.3. *Seien M und N zwei R-Moduln und $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ und $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} N$ projektive Auflösungen; zu jedem R-Modulhomomorphismus $\alpha : M \longrightarrow N$ gibt es genau eine Homotopieklasse $[\alpha^\bullet]$ von Komplexhomomorphismen $\alpha^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ mit $\eta \circ \alpha^0 = \alpha \circ \varepsilon$.*

Corollar 2.4. *Zu je zwei projektiven Auflösungen $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ und $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} M$ gibt es genau eine Homotopieklasse $[\alpha^\bullet]$ von Homotopieäquivalenzen $\alpha^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[dd, "\alpha^\bullet"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
& M \\
Q^\bullet \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd} .$$

kommutativ ist.

Satz 2.5. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{Mod}(R)$ *gibt es ein kommutatives exaktes Diagramm von projektiven Auflösungen*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Q^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & T^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

3 Ext- und Tor-Funktoren

Allgemeines Prinzip der Linksableitung von Funktoren:

Wir fixieren ein für alle Mal projektive Auflösungen

$$P_M^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_M} M \qquad \text{für jeden } R\text{-}Modul\ M$$

und Komplexhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
P_M^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\
P_N^\bullet \arrow[r, "\varepsilon_N"] & N
\end{tikzcd}$$

für jeden R-Modulhomomorphismus α.

Sei nun $F : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R')$ ein *additiver* Funktor! Für $q \geq 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} L^qF(M) &:= h^{-q}(F(P_M^\bullet)) \quad \text{und} \\ L^qF(\alpha) &:= h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) : L^qF(M) \longrightarrow L^qF(N) \ . \end{aligned}$$

Es gilt:

I) $L^qF : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R')$ ist ein Funktor; denn:

- Für $\alpha = \mathrm{id}$ ist $\alpha^\bullet \sim \mathrm{id}$, also $F(\alpha^\bullet) \sim F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und somit $h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) = h^{-q}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$;
- für $L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N$ ist $\alpha^\bullet \circ \beta^\bullet \sim (\alpha \circ \beta)^\bullet$ nach Satz 2.3, also $F(\alpha^\bullet) \circ F(\beta^\bullet) \sim F((\alpha \circ \beta)^\bullet)$ und somit $h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) \circ h^{-q}(F(\beta^\bullet)) = h^{-q}(F((\alpha \circ \beta)^\bullet))$.

Definition. *L^qF heißt die q-te Linksableitung von F.*

II) L^qF ist additiv; denn:

- Aus $P_M^\bullet \oplus P_N^\bullet \sim P_{M\oplus N}^\bullet$ folgt $F(P_{M\oplus N}^\bullet) \sim F(P_M^\bullet \oplus P_N^\bullet) = F(P_M^\bullet) \oplus F(P_N^\bullet)$.

III) Ist P ein projektiver R-Modul, so ist $L^qF(P) = 0$ für alle $q > 0$; denn:

- $P_P^\bullet \sim (\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow P)$.

IV) Die Funktoren L^qF hängen bis auf kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl der $P_M^\bullet$ und $\alpha^\bullet$ ab; denn:

- Satz 2.3.

V) Zu jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \longrightarrow 0$ von R-Moduln hat man eine lange exakte Sequenz von R'-Moduln

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow L^{q+1}F(N) \xrightarrow{\delta^{-(q+1)}} L^qF(L) \xrightarrow{L^qF(\beta)} L^qF(M) \\ \xrightarrow{L^qF(\alpha)} L^qF(N) \xrightarrow{\delta^{-q}} L^{q-1}F(L) \longrightarrow \ldots \ ; \end{aligned}$$

denn:

– Nach Satz 2.5 existiert ein exaktes kommutatives Diagramm von projektiven Auflösungen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Q^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & T^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Wegen der Projektivität von T^q spalten die kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^q \arrow[r] & Q^q \arrow[r] & T^q \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 0,
\end{tikzcd}$$

also $Q^q \cong P^q \oplus T^q$. Die Additivität von F impliziert nun die Exaktheit von $0 \longrightarrow F(P^q) \longrightarrow F(Q^q) \longrightarrow F(T^q) \longrightarrow 0$. Folglich ist

$$0 \longrightarrow F(P^\bullet) \longrightarrow F(Q^\bullet) \longrightarrow F(T^\bullet) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Komplexen. Die behauptete lange exakte Sequenz ergibt sich daraus mittels Lemma 1.1 und IV).

VI) Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{L} \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[r] & \tilde{N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives exaktes Diagramm von R-Moduln, so ist

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & L^{q+1}F(N) \arrow[r] \arrow[d] & L^qF(L) \arrow[r] \arrow[d] & L^qF(M) \arrow[r] \arrow[d] & L^qF(N) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & L^{q+1}F(\tilde{N}) \arrow[r] & L^qF(\tilde{L}) \arrow[r] & L^qF(\tilde{M}) \arrow[r] & L^qF(\tilde{N}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives exaktes Diagramm von R'-Moduln; denn:

– Lemma 1.2 (und Satz 2.3).

Beachte: Die lange exakte Sequenz in V) "hört wie folgt auf":

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow L^1F(L) \longrightarrow L^1F(M) \longrightarrow L^1F(N) \\
\longrightarrow L^0F(L) \longrightarrow L^0F(M) \longrightarrow L^0F(N) \longrightarrow 0\ .
\end{aligned}$$

Definition. *Der Funktor F heißt rechtsexakt, falls für jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ die Sequenz von R'-Moduln $F(L) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow 0$ exakt ist.*

VII) Ist F rechtsexakt, so gilt $L^0 F = F$; denn:

- Betrachte die mittels einer projektiven Auflösung gebildete kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_M^{-1}/\operatorname{im} d \arrow[r] & P_M^0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & P_M^{-1}; \arrow[u, two heads] \arrow[ur, "d"'] & & & \end{tikzcd}$$

dann ist

$$\begin{tikzcd} F(P_M^{-1}/\operatorname{im} d) \arrow[r] & F(P_M^0) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0 \\ F(P_M^{-1}) \arrow[u, two heads] \arrow[ur, "F(d)"'] & & & \end{tikzcd}$$

exakt mit surjektivem senkrechtem Pfeil, also

$$\begin{aligned} F(M) \xleftarrow{\cong} & \operatorname{coker}(F(P_M^{-1}/\operatorname{im} d) \longrightarrow F(P_M^0)) \\ &= \operatorname{coker} F(d) = h^0(F(P_M^\bullet)) = L^0 F(M) \ . \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1. *Ist F exakt, so gilt $L^q F = 0$ für alle $q > 0$.*

Beweis. Mit
$$\ldots \longrightarrow P_M^q \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_M^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
ist auch
$$\ldots \longrightarrow F(P_M^q) \longrightarrow \ldots \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$
exakt. □

Fazit: Für rechtsexaktes F messen die Linksableitungen $L^q F$, wie stark F davon abweicht, exakt zu sein.

Beispiel A: Sei Y ein R-Rechtsmodul. Dann liefert das Tensorprodukt den additiven Funktor

$$Y \otimes_R . : \operatorname{Mod}(R) \longrightarrow \operatorname{Mod}(Z(R)) \ .$$

Definition. $\operatorname{Tor}_q^R(Y,M) := L^q(Y \otimes_R .)(M)$ *heißt das q-te Torsionsprodukt von Y und M (oder einfach der q-te Tor-Funktor).*

Satz 3.2. *Der Funktor $Y \otimes_R .$ ist rechtsexakt.*

Beweis. Sei $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, betrachte

$$Y \otimes_R L \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \beta} Y \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \alpha} Y \otimes_R N \longrightarrow 0 \ .$$

Vorab erinnern wir uns daran, daß jedes Element in $Y \otimes_R N$ eine endliche Summe von Elementen der Form $y \otimes n$ ist.

1) Aus $n = \alpha(m)$ folgt $y \otimes n = (\mathrm{id} \otimes \alpha)(y \otimes m)$. Folglich ist $\mathrm{id} \otimes \alpha$ surjektiv.

2) Es gilt $(\mathrm{id} \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id} \otimes \beta) = \mathrm{id} \otimes \alpha \circ \beta = \mathrm{id} \otimes 0 = 0$ und damit $\mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta) \subseteq \ker(\mathrm{id} \otimes \alpha)$.

3) Also bleibt zu zeigen, daß auch $\ker(\mathrm{id} \otimes \alpha) \subseteq \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta)$ gilt:

Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} Y \times N &\longrightarrow Y \otimes_R M / \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta) \\ (y,n) &\longmapsto y \otimes m + \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta), \quad \text{falls } \alpha(m) = n \ ; \end{aligned}$$

- ist wohldefiniert: aus $\alpha(\tilde{m}) = n$ folgt $\alpha(m - \tilde{m}) = 0$, also $m - \tilde{m} = \beta(\ell)$ für ein $\ell \in L$ und damit $y \otimes m - y \otimes \tilde{m} = y \otimes (m - \tilde{m}) = y \otimes \beta(\ell) \in \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta)$;

- ist biadditiv: klar;

- ist balanciert: klar, da $rn = r\alpha(m) = \alpha(rm)$ und $y \otimes rm = yr \otimes m$.

Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert die wohldefinierte $Z(R)$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : Y \otimes_R N &\longrightarrow Y \otimes_R M / \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta) \\ y \otimes n &\longmapsto y \otimes m + \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta), \quad \text{falls } \alpha(m) = n \ . \end{aligned}$$

Es gilt

$$f \circ (\mathrm{id} \otimes \alpha)(y \otimes m) = f(y \otimes \alpha(m)) = y \otimes m + \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta) \ .$$

Im Falle $y \otimes m \in \ker(\mathrm{id} \otimes \alpha)$ folgt $y \otimes m + \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta) = f(0) = \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta)$ und somit also $\ker(\mathrm{id} \otimes \alpha) \subseteq \mathrm{im}(\mathrm{id} \otimes \beta)$. $\square$

Insbesondere gilt also $\mathrm{Tor}_0^R(Y, M) = Y \otimes_R M$.

Lemma 3.3. *Ist Q ein projektiver R-Rechtsmodul, so ist der Funktor $Q \otimes_R$ exakt.*

Beweis. Ist $Q \cong \oplus_{i \in I} R =: R^I$ frei, so folgt dies aus

$$Q \otimes_R M \cong R^I \otimes_R M = \oplus_i (R \otimes_R M) = \oplus_i M \ .$$

Allgemein sei $Q \oplus P \cong R^I$. Zu jeder exakten Sequenz von R-Linksmoduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ ist dann die linke Spalte in

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^I \otimes_R L & \cong & Q \otimes_R L & \oplus & P \otimes_R L \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^I \otimes_R M & \cong & Q \otimes_R M & \oplus & P \otimes_R M \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^I \otimes_R N & \cong & Q \otimes_R N & \oplus & R \otimes_R N \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

exakt. Dann müssen auch die mittlere und die rechte Spalte exakt der sein. $\square$

Corollar 3.4. $\mathrm{Tor}_q^R(Y, M) = 0$ *für alle $q > 0$, falls Y oder M projektiv ist.*

Beweis. Ist M projektiv, so wende obigen Punkt III) an. Ist Y projektiv, so benutze Bem. 3.1 und Lemma 3.3. $\square$

Satz 3.5. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ von R-Rechtsmoduln hat man eine lange exakte Sequenz von $Z(R)$-Moduln*

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{q+1}^R(Z, M) \longrightarrow \\ \mathrm{Tor}_q^R(X, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^R(Y, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^R(Z, M) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Beweis. Betrachte die Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow X \otimes_R P_M^\bullet \longrightarrow Y \otimes_R P_M^\bullet \longrightarrow Z \otimes_R P_M^\bullet \longrightarrow 0 \ .$$

Auf Grund von Lemma 3.3 (sinngemäß in der anderen Variablen) ist dies ist eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Wende nun Lemma 1.1 an. $\square$

Corollar 3.6. *Sei* $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} Y$ *eine projektive Auflösung von R-Rechtsmoduln; dann gilt*

$$\mathrm{Tor}_p^R(Y, M) = h^{-p}(Q^\bullet \otimes_R M)\ .$$

Beweis. Bilde nach Satz 3.5 die langen exakten Sequenzen zu den kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \ker\eta \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \ker d^{-1} \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow \mathrm{im}\, d^{-1} \longrightarrow 0 \\ \vdots \\ 0 \longrightarrow \ker d^p \longrightarrow Q^p \longrightarrow \mathrm{im}\, d^p \longrightarrow 0\ . \end{gathered}$$

Wegen Cor. 3.4 liefern diese Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_p^R(Y, M) &\cong \ldots \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{im}\, d^{-p+1}, M) \\ &\cong \ker((\ker d^{-p+1}) \otimes_R M \xrightarrow{\subseteq \otimes\, \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &\cong \ker((\mathrm{coker}\, d^{-p-1}) \otimes_R M \xrightarrow{d^p \otimes \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &= \ker(\mathrm{coker}(d^{-p-1} \otimes \mathrm{id}) \xrightarrow{d^p \otimes \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &= h^{-p}(Q^\bullet \otimes_R M)\ , \end{aligned}$$

wobei die zweitletzte Identität die Rechtsexaktheit des Funktors $\otimes_R M$ benutzt. □

Woher kommt der Name Torsionsprodukt?

Wir betrachten dazu den Fall $R = \mathbb{Z}$, so daß $\mathrm{Mod}(R)$ übereinstimmt mit der Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition. *Sei* M *eine abelsche Gruppe; die Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung in* M *heißt die Torsionsgruppe* $\mathrm{Tor}(M)$ *von* M.

Um den Funktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}}\ . : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Q})$$

zu verstehen, betrachten wir auf der Menge $M \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$(m, b) \sim (m', b'), \quad \text{falls ein } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ existiert mit } cb'm = cbm'\ .$$

Setze

$$\frac{m}{b} := \text{ Äquivalenzklasse von } (m, b)$$

und

$$M_{\mathbb{Q}} := M \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \sim = \text{ Menge aller Äquivalenzklassen.}$$

Mittels

$$\frac{n}{a} + \frac{m}{b} := \frac{bn + am}{ab}$$

wird $M_{\mathbb{Q}}$ zu einer abelschen Gruppe. Dabei gilt:

a) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{Q}} &\rightleftarrows \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ \tfrac{m}{b} &\mapsto \tfrac{1}{b} \otimes m \\ \tfrac{am}{b} &\leftarrow \tfrac{a}{b} \otimes m \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Isomorphismen von abelschen Gruppen;

b) der Kern des Homomorphismus

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ m &\longmapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

ist wegen a) gleich

$$\{m \in M : \frac{m}{1} = 0\} = \{m \in M : cm = 0 \text{ für ein } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \mathrm{Tor}(M);$$

c) der Funktor $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} .$ ist exakt; denn:
Wegen Satz 3.2 ist nur die Linksexaktheit zu zeigen. Sei also $\alpha : M \longrightarrow N$ ein injektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen, und sei $\frac{m}{b} \in M_{\mathbb{Q}}$ mit $\frac{\alpha(m)}{b} = 0$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\alpha(cm) = c\alpha(m) = cb \cdot 0 = 0$. Da α injektiv ist, folgt $cm = 0$, also $\frac{m}{b} = 0$ (*Warnung:* $\mathbb{Q}$ ist nicht projektiv als $\mathbb{Z}$-Modul.)

Aus Lemma 3.3 und c) (zusammen mit Bem. 3.1) folgt, daß

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) = \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, M) = 0 \qquad \text{für alle } q > 0 \, .$$

Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und die nach Satz 3.5 zugehörige lange exakte Sequenz. Obige Verschwindungsaussage impliziert dann $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) = 0$ für $q \geq 2$ und

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) = \ker(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \overset{b)}{=} \mathrm{Tor}(M) \, .$$

Wir haben bisher nur *kovariante Funktoren* F, also

$$\begin{aligned} M &\longmapsto F(M), \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (F(\alpha) : F(M) \longrightarrow F(N)) \\ &\qquad \text{mit } F(\mathrm{id}) = \mathrm{id},\ F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)\ , \end{aligned}$$

betrachtet. Genauso natürlich ist es aber, den Funktor "die Pfeile umdrehen zu lassen". Ein *kontravarianter Funktor* $G : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R')$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M &\longmapsto G(M) \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (G(\alpha) : G(N) \longrightarrow G(M)) \\ &\qquad \text{mit } G(\mathrm{id}) = \mathrm{id},\ G(\alpha \circ \beta) = G(\beta) \circ G(\alpha)\ . \end{aligned}$$

Der Begriff der Linksableitung L^qG funktioniert analog ("es drehen sich nur die Pfeile um"): Sei G ein additiver kontravarianter Funktor. Anwendung auf eine projektive Auflösung

$$\ldots \longrightarrow P_M^q \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_M^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ergibt einen Komplex

$$0 \longrightarrow G(M) \longrightarrow G(P_M^0) \longrightarrow \ldots \longrightarrow G(P_M^q) \longrightarrow \ldots,$$

dessen Terme sich in den Graden $-1, 0, \ldots, -q, \ldots$ befinden. Dann sind

$$L^qG(M) := h^{-q}(G(P_M^\bullet))$$

kontravariante Funktoren. Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ hat man die lange exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\delta} L^qG(N) \longrightarrow L^qG(M) \longrightarrow L^qG(L) \xrightarrow{\delta} L^{q+1}G(N) \longrightarrow \ldots$$

Definition. *Der Funktor G heißt rechtsexakt, falls für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ die Sequenz $0 \longrightarrow G(N) \longrightarrow G(M) \longrightarrow G(L)$ exakt ist.*

Es gilt:

1) Ist G rechtsexakt, so $L^0G = G$;

2) ist G exakt, so $L^qG = 0$ für alle $q > 0$.

Beispiel B: Sei Y ein R-Modul; dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(.,Y) : \mathrm{Mod}(R) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(Z(R)) \\ M &\longmapsto \mathrm{Hom}_R(M,Y) \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (\mathrm{Hom}_R(N,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,Y)) \\ &\qquad\qquad\qquad \beta \longmapsto \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

ein rechtsexakter additiver kontravarianter Funktor.

Definition. $\mathrm{Ext}^q_R(M,Y) := L^q \mathrm{Hom}_R(.,Y)(M)$ *heißt die q-te Ext-Gruppe von M und Y.*

Zusammenfassung. *1)* $\mathrm{Ext}^q_R(.,Y) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Z(R))$ *ist ein additiver kontravarianter Funktor.*

2) Für projektives P ist $\mathrm{Ext}^q_R(P,Y) = 0$ für alle $q > 0$.

3) $\mathrm{Ext}^0_R(M,Y) = \mathrm{Hom}_R(M,Y)$.

4) Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ hat man die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,Y) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(N,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(M,Y) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(L,Y) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{q+1}_R(N,Y) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Satz 3.7. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ hat man eine lange exakte Sequenz von $Z(R)$-Moduln*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(M,Y) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^q_R(M,Z) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{q+1}_R(M,X) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachte die Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^\bullet_M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^\bullet_M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^\bullet_M, Z) \longrightarrow 0 \ .$$

Aus der Projektivität von P^q_M folgt die Exaktheit des Funktors $\mathrm{Hom}_R(P^q_M, .)$. Also haben wir oben eine kurze exakte Sequenz von Komplexen und wir können Lemma 1.1 anwenden. ☐

Woher kommt der Name Ext**?**

Das Symbol Ext steht für "extension = Erweiterung". Eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ nennt man auch eine *Erweiterung* von M mit Y. Zwei Erweiterungen $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$ von M mit Y heißen isomorph, falls ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existiert. Setze

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_R(M,Y) := {} & \text{Menge aller Isomorphieklassen} \\ & \text{von Erweiterungen von } M \text{ mit } Y \ . \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon = [0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0] \in \operatorname{Ext}(M,Y)$. Betrachte die zugehörige lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} & 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(E,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(Y,Y) \\ & \xrightarrow{\delta_\varepsilon} \operatorname{Ext}^1_R(M,Y) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Faktum. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_R(M,Y) & \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ext}^1_R(M,Y) \\ \varepsilon & \longmapsto \delta_\varepsilon(\mathrm{id}_Y) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Alle Ext-Gruppen $\operatorname{Ext}^q_R(M,Y)$ haben eine konkrete Interpretation in ähnlicher Form.

4 Cartan-Eilenberg-Auflösungen

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitgehende Verallgemeinerung von Satz 2.5 herleiten.

Lemma 4.1. *Sei*

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d] & & P'' \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

ein exaktes Diagramm von R-Moduln, wobei P' und P'' projektiv seien; dies läßt sich stets ergänzen zu einem kommutativen exakten Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit projektivem P.

Beweis. Wir definieren $P := P' \oplus P''$. Dann ist

$$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\mathrm{pr}} P'' \longrightarrow 0 \ ,$$

eine kurze exakte Sequenz von projektiven Moduln. Das Kompositum

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\iota"] & \\
M' \arrow[r] & M,
\end{tikzcd}$$

eine beliebig gewählte Liftung

$$\begin{tikzcd}
& P'' \arrow[dl, dashed, "\pi"'] \arrow[d] & \\
M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sowie die Abbildung

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow M \\ (p', p'') &\longmapsto \iota(p') + \pi(p'') \end{aligned}$$

liefern die gewünschte Ergänzung. $\square$

Satz 4.2. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von R-Moduln und vorgegebenen projektiven Auflösungen $P'^{\bullet} \longrightarrow M'$ und $P''^{\bullet} \longrightarrow M''$ existiert eine projektive Auflösung $P^{\bullet} \longrightarrow M$ und ein kommutatives exaktes Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & P^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & P''^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir konstruieren $P^\bullet \longrightarrow M$ per Induktion nach q. Sei also

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & P''^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'^{q+2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{q+2} \arrow[r] \arrow[d] & P''^{q+2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'^{q+3} \arrow[r] \arrow[d] & P^{q+3} \arrow[r] \arrow[d] & P''^{q+3} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

für ein $q \geq 0$ schon konstruiert. Auf Grund des Schlangenlemmas ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker(d_{P'}^{q+1}) \longrightarrow \ker(d_P^{q+1}) \longrightarrow \ker(d_{P''}^{q+1}) \longrightarrow 0$$

ist exakt (im Falle $q = 0$ sind die Kerne der Abbildungen in die Moduln M' bzw. M bzw. M'' zu nehmen). Mit Hilfe von Lemma 4.1 können wir dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'^q \arrow[r, dashed] \arrow[d, "d_{P'}^q"] & P^q \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "d_P^q"] & P''^q \arrow[r] \arrow[d, "d_{P''}^q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d_{P'}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(d_P^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(d_{P''}^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit einem projektiven Modul P^q wie angegeben ergänzen. □

Notation. Sei $L^\bullet$ ein Komplex von R-Moduln; dann heißt

$z^q(L^\bullet) := \ker d^q$ der Modul der q-Cozykel von $L^\bullet$ und

$b^q(L^\bullet) := \operatorname{im} d^{q-1}$ der Modul der q-Coränder von $L^\bullet$.

Offensichtlich gilt

$$h^q(L^\bullet) = z^q(L^\bullet)/b^q(L^\bullet) .$$

Definition. *Sei M^* ein Komplex von R-Moduln; eine projektive Cartan-Eilenberg-Auflösung von M^* ist eine exakte Sequenz von Komplexen*

$$\ldots \longrightarrow P^{*,q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^{*,0} \longrightarrow M^* \longrightarrow 0$$

[d. h. ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & M^{p-1} \arrow[r] \arrow[u] & M^{p} \arrow[r] \arrow[u] & M^{p+1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1,0} \arrow[r] \arrow[u] & P^{p,0} \arrow[r] \arrow[u] & P^{p+1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
\cdots \arrow[r] & P^{p-1,q} \arrow[r] \arrow[u] & P^{p,q} \arrow[r] \arrow[u] & P^{p+1,q} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Spalten und Komplexen in den Zeilen], so daß für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

- $P^{p,\bullet} \longrightarrow M^p$ *ist eine projektive Auflösung von* M^p,
- $z^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow z^p(M^*)$ *ist eine projektive Auflösung von* $z^p(M^*)$,
- $b^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow b^p(M^*)$ *ist eine projektive Auflösung von* $b^p(M^*)$,
- $h^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow h^p(M^*)$ *ist eine projektive Auflösung von* $h^p(M^*)$.

Satz 4.3. *Jeder Komplex M^* von R-Moduln besitzt eine projektive Cartan-Eilenberg-Auflösung.*

Beweis. Wir schreiben abgekürzt

$$Z^p := z^p(M^*),\ B^p := b^p(M^*),\ H^p := h^p(M^*)\ .$$

1. Schritt: Wir konstruieren projektive Auflösungen

$P^\bullet(M^p),\ P^\bullet(Z^p),\ P^\bullet(B^p),\ P^\bullet(H^p)$ der R-Moduln $M^p,\ Z^p,\ B^p,\ H^p$

zusammen mit kommutativen exakten Diagrammen

(i/p)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^\bullet(Z^p) \arrow[r] \arrow[d] & P^\bullet(M^p) \arrow[r] \arrow[d] & P^\bullet(B^{p+1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^p \arrow[r, "\subseteq"] & M^p \arrow[r, "d_M^p"] & B^{p+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und

(ii/p)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P^\bullet(B^p) \arrow[r] \arrow[d] & P^\bullet(Z^p) \arrow[r] \arrow[d] & P^\bullet(H^p) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B^p \arrow[r, "\subseteq"] & Z^p \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & H^p \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

wie folgt: Zunächst wähle $P^\bullet(B^p)$ und $P^\bullet(H^p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Dann benutze Satz 4.2 zuerst, um $P^\bullet(Z^p)$ mit (ii/p), und anschließend, um $P^\bullet(M^p)$ mit (i/p) zu konstruieren.

2. Schritt: Wir definieren $P^{*,\bullet} := P^\bullet(M^*)$ und

$$\begin{tikzcd} P^{p,\bullet} \arrow[rrr, dashed, "d^{p,\bullet}"] \arrow[d, equal] & & & P^{p+1,\bullet} \arrow[d, equal] \\ P^\bullet(M^p) \arrow[r, two heads, "i/p"'] & P^\bullet(B^{p+1}) \arrow[r, hook, "ii/p+1"'] & P^\bullet(Z^{p+1}) \arrow[r, hook, "i/p+1"'] & P^\bullet(M^{p+1}) \ . \end{tikzcd}$$

□

Bemerkung 4.4. *Man kann Homomorphismen, Homotopien zwischen Homomorphismen und Homotopieäquivalenzen zwischen projektiven Cartan-Eilenberg-Auflösungen definieren. Es gilt dann: Je zwei projektive Cartan-Eilenberg-Auflösungen des Komplexes M^* sind homotopieäquivalent mittels einer eindeutig bestimmten Homotopieklasse von Homomorphismen (vgl. [CE] Chap. XVII Prop. 1.2).*

Teil II
Spektralsequenzen

5 Filtrierte Komplexe

Sei $M^\bullet$ ein Komplex von R-Moduln. Ein Unterkomplex $N^\bullet \subseteq M^\bullet$ ist eine Inklusion von Komplexen.

Definition. *Eine Filtrierung von $M^\bullet$ ($M^\bullet$ heißt dann filtriert) ist eine absteigende Folge von Unterkomplexen*

$$\ldots \supseteq {}^{p}M^\bullet \supseteq {}^{p+1}M^\bullet \supseteq \ldots \qquad \text{für } p \in \mathbb{Z}$$

in $M^\bullet$, so daß gilt

$$M^q = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} {}^{p}M^q \qquad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}\ .$$

Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ hat man dann den Quotientenkomplex ${}^{p}M^\bullet/{}^{p+1}M^\bullet$.

Problemstellung. *Kann man $h^q(M^\bullet)$ aus den $h^q({}^{p}M^\bullet/{}^{p+1}M^\bullet)$ berechnen?*

Für $p, q, r \in \mathbb{Z}$ setze

$$Z_r^{pq} := \{x \in {}^{p}M^{p+q} : dx \in {}^{p+r}M^{p+q+1}\} = d^{-1}({}^{p+r}M^{p+q+1}) \cap {}^{p}M^{p+q}\ ,$$
$$B_r^{pq} := d({}^{p-r}M^{p+q-1}) \cap {}^{p}M^{p+q}$$

und

$$Z_\infty^{pq} := z^{p+q}(M^\bullet) \cap {}^{p}M^{p+q}\ ,$$
$$B_\infty^{pq} := b^{p+q}(M^\bullet) \cap {}^{p}M^{p+q}\ .$$

Es gilt:

a) ${}^{p}M^{p+q} = \ldots = Z_0^{pq} \supseteq Z_1^{pq} \supseteq \ldots \supseteq Z_\infty^{pq} \supseteq B_\infty^{pq} \supseteq \ldots \supseteq B_1^{pq} \supseteq B_0^{pq} = d({}^{p}M^{p+q-1}) \supseteq B_{-1}^{pq} = d({}^{p+1}M^{p+q-1}) \supseteq \ldots$.

b) $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subseteq Z_r^{pq}$ und $Z_\infty^{p+1,q-1} \subseteq Z_\infty^{pq}$.

c) $B_r^{pq} = dZ_r^{p-r,q+r-1}$.

Wir definieren

$$E_r^{pq} := Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \qquad \text{für } r \in \mathbb{Z}$$

und

$$E_\infty^{pq} := Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \ .$$

Es gilt:

d) Für $r \leq 0$ ist

$$\begin{aligned} E_r^{pq} &= {}^pM^{p+q}/\big(d({}^{p+1-r}M^{p+q-1}) + {}^{p+1}M^{p+q}\big) \\ &= {}^pM^{p+q}/\ {}^{p+1}M^{p+q} \ . \end{aligned}$$

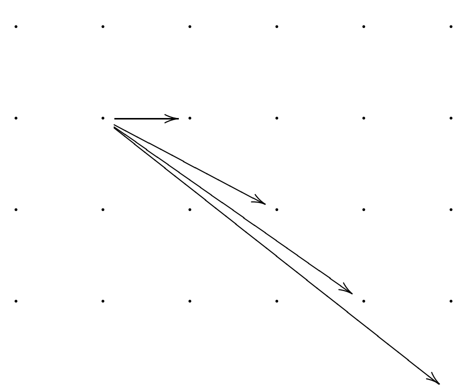
Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z_r^{pq} \arrow[rr, "d"] & & Z_r^{p+r,q-r+1} \\
B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d, equal, "c)"'] & dZ_{r-1}^{p+1,q-1} & \underset{c)}{=} B_{r-1}^{p+r,q-r+1} \arrow[u, hook] \\
d(\ldots) + Z_{r-1}^{p+1,q-1} & &
\end{tikzcd}$$

ersehen wir, daß d einen Homomorphismus

$$d_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1} \ .$$

induziert. Die folgende Graphik deutet die Richtung dieser Pfeile für $r \geq 1$ an:



Es gilt:

e) $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{pq} = 0$ (wegen $d \circ d = 0$).

f) $d_0^{pq} : {}^pM^{p+q}/{}^{p+1}M^{p+q} \xrightarrow{d} {}^pM^{p+q+1}/{}^{p+1}M^{p+q+1}$.

Definition. *Die Familie $\{(E_r^{pq}, d_r^{pq})\}_{p,q,r\in\mathbb{Z}}$ heißt die Spektralsequenz zu $M^\bullet$.*

Satz 5.1. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} E_{r+1}^{pq} &\xrightarrow{\cong} \ker(d_r^{pq})/\operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \\ x + (B_r^{pq} + Z_r^{p+1,q-1}) &\longmapsto (x + (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})) + \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir berechnen zuerst die rechte Seite. Sei $x \in Z_r^{pq}$ mit $dx \in B_{r-1}^{p+r,q-r+1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \stackrel{c)}{=} dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$, also $dx = dy + z$ mit $y \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ und $z \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Für $u := x - y$ gilt dann $du = z \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ und $u = x - y \in^p M^{p+q} + {}^{p+1}M^{p+q} = {}^pM^{p+q}$. Es folgt $u \in Z_{r+1}^{pq}$, also $x \in Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$. Das zeigt

$$\ker(d_r^{pq}) = (Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \ .$$

Weiter ist $d(Z_r^{p-r,q+r-1}) = B_r^{pq} \subseteq B_{r-1}^{pq}$ wegen c) und damit

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) &= d(Z_r^{p-r,q+r-1}) + (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ &= (B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \ . \end{aligned}$$

Mit $Z_{r+1}^{pq} \supseteq B_r^{pq}$ und $Z_{r+1}^{pq} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} == Z_r^{p+1,q-1}$ ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} \ker(d_r^{pq})/\operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) &= (Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ &= Z_{r+1}^{pq}/Z_{r+1}^{pq} \cap (B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ &= Z_{p+r}^{pq}/(B_r^{pq} + Z_r^{p+1,q-1}) \\ &= E_{r+1}^{pq} \ . \end{aligned}$$

□

Corollar 5.2. $E_1^{pq} = h^{p+q}({}^pM^\bullet/{}^{p+1}M^\bullet)$.

Wir definieren eine absteigende Filtrierung auf $h^q(M^\bullet)$ durch

$${}^ph^q(M^\bullet) := \operatorname{im}(h^q({}^pM^\bullet) \longrightarrow h^q(M^\bullet)) \ .$$

Satz 5.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} E_\infty^{pq} &\xrightarrow{\cong} {}^ph^{p+q}(M^\bullet)/{}^{p+1}h^{p+q}(M^\bullet) \\ x + \ldots &\longmapsto x + \ldots \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, daß $Z_\infty^{pq} = \{x \in {}^pM^{p+q} : dx = 0\} \twoheadrightarrow h^{p+q}({}^pM^\bullet)$ surjektiv ist. Somit ist auch die Abbildung in der Behauptung surjektiv. Sei nun $x \in {}^pM^{p+q}$ mit $dx = 0$ und $x + \mathrm{im}(d) \in {}^{p+1}h^{p+q}(M^\bullet)$. Dann existiert ein $y \in {}^{p+1}M^{p+q}$ mit $dy = 0$ und $x - y = dz \in B_\infty^{pq}$. Folglich gilt $x \in B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}$. □

Die Cohomologiegruppen $h^{p+q}(M^\bullet)$ bauen sich aus den E_r^{pq} wie folgt auf. Zunächst haben wir das kommutative exakte Diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^{p+1}h^{p+q}(M^\bullet) \arrow[r] & {}^ph^{p+q}(M^\bullet) \arrow[r] & E_\infty^{pq} \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & h^{p+q}({}^{p+1}M^\bullet) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & h^{p+q}({}^pM^\bullet) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & h^{p+q}({}^pM^\bullet/{}^{p+1}M^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal, "5.2"] & \cdots \\
& & & E_1^{pq},
\end{tikzcd}$$

wobei der Zusammenhang zwischen den beiden rechten äußeren Termen sukzessive durch die E_r^{pq} approximiert wird:

$$(+) \qquad \begin{tikzcd}
E_r^{pq} = Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \arrow[d, two heads] \\
Z_r^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\
Z_r^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \arrow[u, two heads] \\
E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Definition. *Die Filtrierung auf $M^\bullet$ heißt regulär, falls zu jedem $q \in \mathbb{Z}$ ein $n(q) \in \mathbb{Z}$ existiert mit ${}^{n(q)}M^q = 0$.*

Im Folgenden setzen wir die Filtrierung stets als regulär voraus. Dann ist

$$ {}^pM^q = 0 \quad \text{für } p \geq n(q) \ . $$

Es gilt:

g) $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$ für $r \geq n(p+q+1) - p$;
denn: Aus $x \in Z_r^{pq}$ folgt $dx \in {}^{p+q}M^{p+q+1} = 0$.

h) Für $s \geq r \geq n(p+q+1) - p$ haben wir (vgl. (+)) das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & E_s^{pq} \arrow[dl, two heads] \\
& E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}). &
\end{tikzcd}$$

i) $\varinjlim_{r\geq n(p+q+1)-q} E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$;
denn: Wegen h) bedeutet die Behauptung, daß zu jedem $s \geq n(p+q+1)-1$ und jedem $e \in \ker(E_s^{pq} \to E_\infty^{pq})$ ein $t \geq s$ mit $e \in \ker(E_s^{pq} \to E_t^{pq})$ existiert. Dies folgt sofort aus $B_\infty^{pq} = \bigcup_{s\gg 0} B_s^{pq}$.

j) Ist $E_r^{pq} = 0$, so auch $E_s^{pq} = 0$ für alle $s \geq r$ und damit $E_\infty^{pq} = 0$;
denn: Satz 5.1 und h).

Satz 5.4. *Die Filtrierung auf $M^\bullet$ sei regulär; weiter existiere ein $r \in \mathbb{Z}$ und zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ ein $q(n) \in \mathbb{Z}$ mit*

$$E_r^{n-q,q} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und alle } q \neq q(n) \ ;$$

dann gilt

$$h^n(M^\bullet) \cong E_\infty^{n-q(n),q(n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

(Man sagt in diesem Fall: Die Spektralsequenz degeneriert.)

Beweis. Aus j) folgt $E_r^{n-q,q} = E_s^{n-q,q} = E_\infty^{n-q,q} = 0$ für alle $s \geq r$ und $q \neq q(n)$. Wegen Satz 5.3 verschwinden also in der Filtrierung von $h^n(M^\bullet)$ alle Schritte außer dem $(n-q(n))$-ten, und dieser ist gleich $E_\infty^{n-q(n),q(n)}$. Nun ist aber einerseits $\bigcup_p {}^p h^n(M^\bullet) = h^n(M^\bullet)$. Andererseits ist ${}^p h^n(M^\bullet) = 0$ für $p >> 0$ wegen der Regularität der Filtrierung von $M^\bullet$. Also folgt $h^n(M^\bullet) = E_\infty^{n-q(n),q(n)}$. $\square$

6 Doppelkomplexe

Definition. *Ein Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ ist ein kommutatives Diagramm der Form*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & M^{i,j+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_I^{i,j+1}"] & M^{i+1,j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{ij} \arrow[u, "d_{II}^{ij}"'] \arrow[r, "d_I^{ij}"] & M^{i+1,j} \arrow[u, "d_{II}^{i+1,j}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

für $i, j \in \mathbb{Z}$, in welchem alle Spalten und Zeilen Komplexe sind.

Beispiel. Cartan-Eilenberg-Auflösungen.

Zu jedem Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ ist der assoziierte *Totalkomplex* $\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ definiert durch

$$\mathrm{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) := \oplus_{i+j=n} M^{ij}$$
$$\begin{aligned} \mathrm{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) = \oplus_{i+j=n} M^{ij} &\xrightarrow{d^n} \oplus_{i+j=n+1} M^{ij} = \mathrm{Tot}^{n+1}(M^{\bullet\bullet}) \\ (x^{ij})_{i+j=n} &\longmapsto (d_I^{i-1,j} x^{i-1,j} + (-1)^i d_{II}^{i,j-1} x^{i,j-1})_{i+j=n+1} \ . \end{aligned}$$

Übungsaufgabe. Rechne die Komplexeigenschaft von $\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ nach.

Der Doppelkomplex besitzt zwei Filtrierungen:

- 1. Filtrierung nach den Spalten ("beginne mit der p-ten Spalte"):

$$ {}_I^p M^{ij} := \begin{cases} M^{ij} & \text{für } i \geq p \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 2. Filtrierung nach den Zeilen ("beginne mit der p-ten Zeile"):

$$ {}_{II}^p M^{ij} := \begin{cases} M^{ij} & \text{für } j \geq p \ , \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Dies führt zu entsprechenden Filtrierungen des Totalkomplexes.

- 1. Filtrierung: ${}_I^p \mathrm{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) := \bigoplus\limits_{\substack{i+j=n \\ i \geq p}} M^{ij}$
- 2. Filtrierung: ${}_{II}^p \mathrm{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) := \bigoplus\limits_{\substack{i+j=n \\ j \geq p}} M^{ij}$

Definition. *Ein Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ heißt nach oben beschränkt, wenn $r, s \in \mathbb{Z}$ existieren mit $M^{ij} = 0$ für $i > r$ oder $j > s$.*

Bemerkung 6.1. *Ist $M^{\bullet\bullet}$ nach oben beschränkt, so sind beide Filtrierungen von $\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ regulär.*

Betrachten wir die Spektralsequenz zur 1. Filtrierung genauer:

$$\begin{aligned} {}_I^p \mathrm{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) / {}_I^{p+1} \mathrm{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) &= \bigoplus\limits_{\substack{i+j=p+q \\ i \geq p}} M^{ij} \Big/ \bigoplus\limits_{\substack{i+j=p+q \\ i \geq p+1}} M^{ij} \\ &= M^{pq} \end{aligned}$$

(hier sehen wir den Grund für unsere Nummerierungskonvention in §5) und

$$\begin{tikzcd} {}^p \mathrm{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) / {}^{p+1} \mathrm{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & {}^p \mathrm{Tot}^{p+q+1}(M^{\bullet\bullet}) / {}^{p+1} \mathrm{Tot}^{p+q+1}(M^{\bullet\bullet}) \arrow[d, equal] \\ M^{pq} \arrow[r, "(-1)^p d_{II}^{pq}"] & M^{p,q+1}. \end{tikzcd}$$

Aus Cor. 5.2 folgt ${}_IE_1^{pq} = h_{II}^q(M^{p,\bullet})$, wobei das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{}_IE_1^{pq} \arrow[r, "d_1^{pq}"] \arrow[d, equal] & {}_IE_1^{p+1,q} \arrow[d, equal] \\
h_{II}^q(M^{p,\bullet}) \arrow[r, "h_{II}^q(d_I^{p,\bullet})"] & h_{II}^q(M^{p+1,\bullet})
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Somit erhalten wir folgenden Sachverhalt.

Lemma 6.2. ${}_IE_1^{pq} = h_{II}^q(M^{p,\bullet})$ *und* ${}_IE_2^{pq} = h_I^p(h_{II}^q(M^{\bullet\bullet}))$.

Das entsprechende Ergebnis für die Spektralsequenz zur 2. Filtrierung lautet wie folgt.

Lemma 6.3. ${}_{II}E_1^{pq} = h_I^q(M^{\bullet,p})$ *und* ${}_{II}E_2^{pq} = h_{II}^p(h_I^q(M^{\bullet\bullet}))$.

Anwendung 6.4. *Es gelte*

a. $M^{ij} = 0$ *für* $i >> 0$ *oder* $j > 0$;

b. alle Spalten des Doppelkomplexes $M^{\bullet\bullet}$ *seien exakt in den Graden* < 0.

Betrachte nun die Spektralsequenz zur 1. Filtrierung von $\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$*: Wegen a) ist die 1. Filtrierung ist regulär. Wegen b) und Lemma 6.2 gilt* ${}_IE_2^{pq} = 0$ *für* $q \neq 0$. *Also*

$$\begin{tikzcd}
{}_IE_2^{pq} : \cdots & \bullet \arrow[drr] \arrow[ddrrr] & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Folglich ist ${}_IE_2^{n,0} = {}_IE_\infty^{n,0}$. *Mit Satz 5.4 ergibt sich*

$$\begin{aligned}
h^n(\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})) &= {}_IE_2^{n,0} \\
&= h^n\left(\ldots \longrightarrow \operatorname{coker}\begin{pmatrix} M^{\bullet,0} \\ \uparrow d_{II} \\ M^{\bullet,-1}\end{pmatrix} \xrightarrow{d_I} \operatorname{coker}\begin{pmatrix} M^{\bullet,0} \\ \uparrow d_{II} \\ M^{\bullet,-1}\end{pmatrix} \longrightarrow \ldots\right)
\end{aligned}$$

Gilt sogar

c. alle Spalten von $M^{\bullet\bullet}$ *sind exakt,*

so ist $\mathrm{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ *ist exakt.*

Teil III
Dimensionsbegriffe für Moduln

7 Projektive Dimension

Definition. *Eine projektive Auflösung $P^\bullet \longrightarrow M$ des R-Moduls M heißt von der Länge $\leq n$, falls $P^q = 0$ gilt für alle $q < -n$.*

Satz 7.1. *Sei M ein R-Modul und $n \geq 0$; dann sind äquivalent:*

i. $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$ *für alle R-Moduln X;*

ii. in jeder exakten Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P^{-(n-1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit projektiven $P^0, \ldots, P^{-(n-1)}$ ist auch L projektiv;

iii. M besitzt eine projektive Auflösung der Länge $\leq n$.

Beweis. i. $\Longrightarrow$ ii. Wir spalten die gegebene exakte Sequenz auf in kurze exakte Sequenzen
$$0 \longrightarrow L^{q-1} \longrightarrow P^q \longrightarrow L^q \longrightarrow 0$$
mit $L^0 := M$ und $L^{-n} := L$. Die zugehörigen langen exakten Sequenzen ergeben

$$\mathrm{Ext}_R^1(L, X) \cong \mathrm{Ext}_R^2(L^{-(n-1)}, X) \cong \ldots \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$$

für alle X. Betrachte nun ein Testdiagramm

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\beta'"'] & \\ Y \arrow[r, "\alpha"] & Z \arrow[r] & 0 \, . \end{tikzcd}$$

Für $X := \ker \alpha$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_R(L, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(L, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(L, X) = 0 \\ \beta' & \longmapsto & \beta \, . & & \end{array}$$

Also ist L projektiv.

Die Implikationen ii. $\Longrightarrow$ iii. und iii. $\Longrightarrow$ i. sind klar. $\square$

Definition. $\mathrm{pd}_R(M) := \min\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$ *für alle* $X\}$ *heißt die projektive Dimension des R-Moduls M.*

Corollar 7.2. *i.* $\mathrm{pd}_R(M) = 0$ *genau dann, wenn M projektiv ist.*

ii. Für jedes $n > \mathrm{pd}_R(M)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_R(M,X) &= 0 \qquad \textit{für jeden } R\textit{-Linksmodul } X \textit{ und} \\ \mathrm{Tor}^R_N(Y,M) &= 0 \qquad \textit{für jeden } R\textit{-Rechtsmodul } Y. \end{aligned}$$

Beweis. Satz 7.1.iii. □

Definition. *l.gldim(R) := $\sup\{\mathrm{pd}_R(M) : M$ beliebiger R-Linksmodul$\}$ heißt die linke globale Dimension des Ringes R.*

Beispiel. l.gldim$(R) = 0$ genau dann, wenn R halbeinfach ist.

Beweis. Wegen Cor. 7.2.i gilt l.gldim$(R) = 0$ genau dann, wenn alle R-(Links) Moduln projektiv sind.

1) Seien alle R-Moduln projektiv. Betrachte eine Inklusion von Moduln $N \subseteq M$ und dazu das Testdiagramm

$$\begin{tikzcd} & M/N \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\ M \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & M/N \arrow[r] & 0\ . \end{tikzcd}$$

   Also ist N ein direkter Summand von M. Dies zeigt, daß R halbeinfach ist.

2) Umgekehrt sei nun R halbeinfach. Wir betrachten ein beliebiges Testdiagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\sigma\circ\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"] & L \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 0\ . \end{tikzcd}$$

   Da $\ker(\beta)$ ein direkter Summand von M ist, existiert ein $\sigma : L \longrightarrow M$ mit $\beta \circ \sigma = \mathrm{id}_L$. Dann gilt $\beta \circ (\sigma \circ \alpha) = \alpha$. Also ist P projektiv.

□

Definition. $\mathrm{id}_R(N) := \min\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^{n+1}_R(Y,N) = 0$ *für alle* $Y\}$ *heißt die injektive Dimension des R-Moduls N.*

Satz 7.3.

$$\begin{aligned} \textit{l.gldim}(R) &= \min\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,N) = 0 \textit{ für alle } R\textit{-Linksmoduln } M,N\} \\ &= \sup\{\mathrm{id}_R N : N \textit{ beliebiger } R\textit{-Linksmodul}\}\ . \end{aligned}$$

Theorem. *(ohne Beweis) Sei $R = S[x_1,\ldots,x_n]$ der Polynomring in n Variablen über dem kommutativen Ring S; dann gilt:*

$$\mathrm{gldim}(R) = \mathrm{gldim}(S) + n\ .$$

8 Kohärente Ringe

Definition. *Ein R-Modul M heißt endlich-präsentiert, falls eine exakte Sequenz*

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ existiert.

Lemma 8.1. *i. Jeder endlich-präsentierte Modul ist endlich-erzeugt.*

ii. Jeder endlich-erzeugte projektive Modul ist endlich-präsentiert.

iii. Ist R noethersch, so ist jeder endlich-erzeugte Modul endlich-präsentiert.

Lemma 8.2. *Sei M endlich-präsentiert; in jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit endlich-erzeugtem N ist auch L endlich-erzeugt.*

Beweis. Wir finden ein kommutatives exaktes Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & R^m \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & R^n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Aus dem Schlangenlemma folgt $\operatorname{coker}(\beta) = \operatorname{coker}(\alpha)$. Mit N ist also auch $\operatorname{coker}(\beta)$ endlich-erzeugt. Daraus folgt wiederum, daß L endlich-erzeugt ist. □

Lemma 8.3. *i. Für eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ gilt:*

a) mit L und N ist auch M endlich-präsentiert;

b) ist M endlich-präsentiert und L endlich-erzeugt, so ist N endlich-präsentiert;

ii. sei $M = L \oplus N$; dann ist M endlich-präsentiert genau dann, wenn L und N endlich-präsentiert sind.

Beweis. i.a) Wir haben ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^{m_1} \arrow[r] \arrow[d] & R^{m_1+m_2} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^{m_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \ker \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \ker \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{n_1} \arrow[r] \arrow[d] & R^{n_1+n_2} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^{n_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(vgl. Beweis von Lemma 4.1).

i.b) Jetzt haben wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
R^\ell \arrow[dr, two heads] & & R^m \arrow[d] \\
& \tilde{L} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, two heads] & R^n \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[d] \\
& & 0
\end{tikzcd}$$

und somit eine exakte Sequenz der Form

$$R^{m+\ell} \longrightarrow R^n \longrightarrow N \longrightarrow 0\ .$$

ii. Dies folgt aus i.

□

Definition. *Ein endlich-präsentierter Modul M heißt kohärent, wenn jeder endlich-erzeugte Untermodul von M ebenfalls endlich-präsentiert ist.*

Lemma 8.4. *Jeder endlich-erzeugte Untermodul eines kohärenten Moduls ist kohärent.*

Satz 8.5. *Für eine exakte Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ gilt:*

i. Ist L endlich-erzeugt und M kohärent, so ist N kohärent;

ii. mit je zwei Moduln ist auch der dritte kohärent.

Beweis. i. Sei $N_0 \subseteq N$ ein endlich-erzeugter Untermodul (dies schließt insbesondere $N_0 = N$ ein). Mit L ist dann auch $\beta^{-1}(N_0)$ endlich-erzeugt. Wegen der Kohärenz von M ist $\beta^{-1}(N_0)$ also sogar endlich-präsentiert. Mit Hilfe von Lemma 8.3.i.b) folgt dann, daß N_0 endlich-präsentiert ist.

ii. *1. Fall:* Seien M und N kohärent. Wegen Lemma 8.2 ist L endlich-erzeugt und wegen Lemma 8.4 dann auch kohärent. *2. Fall:* Seien L und N kohärent. Sei $M_0 \subseteq M$ ein endlich-erzeugter Untermodul (insbesondere auch $M_0 = M$). Dann ist $\beta(M_0) \subseteq N$ ein endlich-erzeugter Untermodul und ist damit endlich-präsentiert. Wegen Lemma 8.2 ist $L \cap M_0$ ein endlich-erzeugter Untermodul in L und ist damit endlich-präsentiert. Schließlich impliziert Lemma 8.3.i.a), daß M_0 endlich-präsentiert ist. □

Corollar 8.6. *i. Sei $\alpha : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus zwischen kohärenten R-Moduln; dann sind auch* $\ker(\alpha)$, $\mathrm{im}(\alpha) \cong M/\ker(\alpha)$ *und* $\mathrm{coker}(\alpha)$ *kohärente R-Moduln.*

ii. Eine endliche direkte Summe von kohärenten R-Moduln ist kohärent.

iii. Seien $L \subseteq N$ und $M \subseteq N$ kohärente Untermoduln des kohärenten R-Moduls N; dann sind auch die Untermoduln $L + M$ und $L \cap M$ kohärent.

Beweis. i. Als Faktormodul von M ist $\operatorname{im}(\alpha)$ endlich-erzeugt und damit wegen Lemma 8.4 sogar kohärent. Mit Hilfe der exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{im}(\alpha) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{im}(\alpha) \longrightarrow N \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha) \longrightarrow 0$$

und Satz 8.5.ii folgt dann die Kohärenz von $\ker(\alpha)$ und $\operatorname{coker}(\alpha)$.

ii. Dies folgt per Induktion aus Satz 8.5.ii.

iii. Nach ii. ist $L \oplus M$ kohärent. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} L \oplus M &\xrightarrow{\alpha} N \\ (x, y) &\longmapsto x + y \ . \end{aligned}$$

Nach i. sind $\ker(\alpha) = L \cap M$ und $\operatorname{im}(\alpha) = L + M$ kohärent. □

Definition. *Der Ring R heißt (links) kohärent, falls R als R-Linksmodul kohärent ist.*

Satz 8.7. *Sei R ein kohärenter Ring; ein R-Modul M ist kohärent genau dann, wenn er endlich-präsentiert ist.*

Beweis. Die eine Richtung gilt per definitionem. Sei also M endlich-präsentiert, d. h., es existiert eine exakte Sequenz der Form $R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Nach Cor. 8.6.ii sind R^m und R^n kohärent. Wegen Cor. 8.6.i ist dann auch $M \cong \operatorname{coker}(\alpha)$ kohärent. □

Bemerkung 8.8. *Über einem kohärenten Ring R gelten Lemma 8.4, Satz 8.5 und Cor. 8.6 sinngemäß für endlich-präsentierte Moduln.*

Beispiele. a. Noethersche Ringe sind kohärent.

b. Ist S noethersch, so sind die Ringe

$$R := S[x_1, x_2, \ldots] \quad \text{und} \quad R := S[[x_1, x_2, \ldots]]$$

kohärent (aber nicht noethersch, falls die Anzahl der Variablen unendlich ist).

c. Bewertungsringe sind kohärent.

Ergänzung zum Thema "projektive Auflösungen": Sei R ein kohärenter Ring.

A) Jeder endlich-präsentierte R-Modul M besitzt projektive Auflösungen

$$P^\bullet \longrightarrow M \ ,$$

in welchen alle P^q ebenfalls endlich-präsentiert sind. (Im Folgenden werden wir kurz von einer *endlich-präsentierten projektiven Auflösung* sprechen.) Denn: Zunächst finden wir eine exakte Sequenz

$$R^{m_0} \longrightarrow P^0 := R^{n_0} \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \ .$$

Nach Cor. 8.6 ist P^0 kohärent. Aus Satz 8.5 folgt dann, daß $\ker(\alpha_0)$ endlich-präsentiert ist. Also finden wir eine exakte Sequenz

$$R^{n_1} \longrightarrow P^{-1} := R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \ker(\alpha_0) \longrightarrow 0 \ .$$

Diese Argumentation induktiv wiederholend erhalten wir die gewünschte projektive Auflösung.

B) Sei M^* ein Komplex von endlich-präsentierten R-Moduln. Einerseits impliziert Cor. 8.6.i, daß alle $z^q(M^*)$, $b^q(M^*)$, $h^q(M^*)$ endlich-präsentierte R-Moduln sind. Andererseits bleibt Satz 4.2 wegen Cor. 8.6.ii richtig für endlich-präsentierte projektive Auflösungen. Mit Hilfe dieser beiden Tatsachen folgert man leicht (unter Benutzung von **A**): M^* besitzt eine "endlich-präsentierte" Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$P^{*,\bullet} \longrightarrow M^* \ ,$$

d. h. eine Cartan-Eilenberg-Auflösung, so daß

$$\begin{aligned} P^{p,\bullet} &\longrightarrow M^p \\ z^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow z^p(M^*) \\ b^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow b^p(M^*) \\ h^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow h^p(M^*) \end{aligned}$$

sämtlich endlich-präsentierte projektive Auflösungen sind.

9 Dualität

Für jeden R-Linksmodul M haben wir

- den R-Rechtsmodul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ – das *Dual* von M,
- den R-Linksmodul $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ – das *Bidual* von M, sowie
- sowie den R-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \delta_M : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R) \\ x &\longmapsto [\ell \mapsto \ell(x)] \end{aligned}$$

  als die zugehörige *Bidualitätsabbildung.*

Satz 9.1. *Für jeden endlich-erzeugten projektiven R-Linksmodul P gilt:*

i. $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ *ist ein endlich-erzeugter projektiver R-Rechtsmodul;*

ii. die Bidualitätsabbildung $\delta_P : P \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,R),R)$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $R^n = P \oplus Q$. Aus der Additivität des Hom-Funktors folgt

$$\mathrm{Hom}_R(P,R) \oplus \mathrm{Hom}_R(Q,R) = \mathrm{Hom}_R(R^n,R) = \mathrm{Hom}_R(R,R)^n = R^n$$

und damit i. Weiter folgt die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{tikzcd}
P \oplus Q \arrow[r, "\delta_P \oplus \delta_Q"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,R),R) \oplus \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Q,R),R) \arrow[d, equal] \\
R^n \arrow[r, "\delta_{R^n}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R^n,R),R) \arrow[d, equal] \\
R^n \arrow[r, "(\delta_R)^n", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,R),R)^n.
\end{tikzcd}$$

Da δ_R offensichtlich ein Isomorphismus ist, ist es also auch δ_P. □

Für den Rest des Paragraphen sei R ein links- und rechtskohärenter Ring, M ein endlich-präsentierter R-Linksmodul und

$$Q^* \longrightarrow M$$

eine endlich-präsentierte projektive Auflösung von M.

Wegen Satz 9.1.i ist

$$\mathrm{Hom}_R(Q^{-*},R)$$

ein Komplex von endlich-präsentierten projektiven R-Rechtsmoduln. Wir wählen eine endlich-präsentierte Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$P^{*,\bullet} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q^{-*},R)$$

und erhalten so einen Doppelkomplex (A):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & 0 & \\
\mathrm{Hom}_R(M,R) \arrow[r, dashed] & \mathrm{Hom}_R(Q^0,R) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(Q^{-1},R) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(Q^{-p},R) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & P^{0,0} \arrow[u, dashed] \arrow[r] & P^{1,0} \arrow[u, dashed] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{p,0} \arrow[u, dashed] \arrow[r] & \cdots \\
 & P^{0,-1} \arrow[u] \arrow[r] & P^{1,-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{p,-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \\
 & P^{0,q} \arrow[u] \arrow[r] & P^{1,q} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{p,q} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Wir setzen

$$\widehat{P}^{p,q} := \mathrm{Hom}_R(P^{-p,-q},R)$$

und erhalten dann den Doppelkomplex (B):

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\
\cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{p,q} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{-1,q} \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{P}^{0,q} \arrow[u] & & \\
 & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \\
\cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{p,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{-1,1} \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{P}^{0,1} \arrow[u] & & \\
\cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{p,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & \widehat{P}^{-1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{P}^{0,0} \arrow[u] & & \\
\cdots \arrow[r] & Q^{p} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & \cdots \arrow[r] & Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & Q^{0} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Man beachte hierzu, daß wegen Satz 9.1.ii die Identität

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Q^p, R), R) = Q^p$$

gilt.

Wir analysieren nun die Spektralsequenz zu dem Doppelkomplex (B):

1. Filtrierung: Alle (erweiterten) Spalten von (A) sind per Konstruktion exakt und bestehen aus projektiven R-Rechtsmoduln (benutze Satz 9.1.i für die Top-Terme). Daraus folgt

$$h^q(\widehat{P}^{p,\bullet}) = \mathrm{Ext}^q_R(\underbrace{\mathrm{Hom}_R(Q^p, R)}_{\text{projektiv}}, R) = \begin{cases} 0 & \text{für } q > 0, \\ Q^p & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

Wir sehen, daß in (B) alle (erweiterten) Spalten ebenfalls exakt sind. Mit Lemma 6.2 ergibt sich also

$${}_I E_2^{pq} = h^p_I(h^q_{II}((B))) = \begin{cases} 0 & \text{für } q > 0, \\ h^p(Q^\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{für } q = 0, p < 0, \\ M & \text{für } q = p = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Da die 1. Filtrierung ("beginne mit p-ter Spalte") regulär ist, erhalten wir mit Hilfe von §5.i), daß

$$ {}_IE_2^{pq} = {}_IE_r^{pq} = {}_IE_\infty^{pq} = \begin{cases} M & \text{für } p = q = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} $$

für $r \geq 2$, und mit Satz 5.4 schließlich

$$ h^n(\mathrm{Tot}^\bullet((B))) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} $$

Kommentar: In diesem sehr indirekten Sinne der Einbeziehung aller höheren Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}_R^*(M, R)$ gilt also doch eine Art Bidualitätssatz.

2. Filtrierung: Zunächst betrachten wir eine feste Zeile $P^{*,q}$ in (A). Nach Konstruktion sind $z^p(P^{*,q})$, $b^p(P^{*,q})$ und $h^p(P^{*,q})$ projektiv. Also ist

$$ P^{p,q} \cong b^p(P^{*,q}) \oplus h^p(P^{*,q}) \oplus b^{p-1}(P^{*,q}) \ . $$

Wegen der Additivität von $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$ erhalten wir daraus

$$ \mathrm{Hom}_R(h^p(P^{*,q}), R) = h_I^{-p}(\widehat{P}^{*,-q}) \ . $$

Nach Konstruktion ist $h_I^p(P^{*,\bullet})$ eine projektive Auflösung von

$$ h^p(\mathrm{Hom}_R(Q^{-\bullet}, R)) = \mathrm{Ext}_R^p(M, R) \ . $$

Wir folgern

$$ \begin{aligned} \mathrm{Ext}_R^q(\mathrm{Ext}_R^p(M, R), R) &= h^q(\mathrm{Hom}_R(h^p(P^{*,-\bullet}), R)) \\ &= h_{II}^q(h_I^{-p}(\widehat{P}^{*,\bullet})) \\ &= {}_{II}E_2^{q,-p} \ , \end{aligned} $$

wobei die letzte Identität Lemma 6.3 benutzt.

Resultat 9.2.

$$ {}_{II}E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^{-q}(M, R), R) $$

Die 2. Filtrierung induziert auf $M = h^0(\mathrm{Tot}^\bullet((B)))$ eine absteigende Filtrierung

$$ \Delta^p(M) := {}^ph^0(\mathrm{Tot}^\bullet((B))) $$

mit

$$ M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \dots $$

und (Satz 5.3)

$$ \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \cong E_\infty^{p,-p} \ . $$

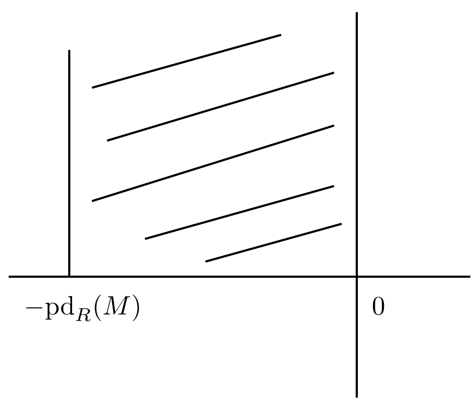
Bemerkung 9.3. *Ist M endlich-präsentiert mit $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$, so besitzt M eine endlich-präsentierte projektive Auflösung der Länge $\mathrm{pd}_R(M)$.*

Beweis. Sei $Q^* \longrightarrow M$ eine beliebige endlich-präsentierte projektive Auflösung, und sei $n := \mathrm{pd}_R(M)$. Dann ist

$$0 \longrightarrow P := \ker(d^{-(n-1)}) \longrightarrow Q^{-(n-1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine Auflösung wie gewünscht. Wegen Satz 7.1 ist P nämlich projektiv und wegen Cor. 8.6.i endlich-präsentiert. $\square$

Wir setzen nun zusätzlich $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$ voraus und stellen die obigen überlegungen an mit einer endlich-präsentierten projektiven Auflösung von M der Länge $\mathrm{pd}_R(M)$. In diesem Falle ist auch die 2. Filtrierung zu (B) regulär. Genauer gilt: Der Komplex ${}^p\,\mathrm{Tot}^\bullet((B))$ beginnt im Grade $\geq p - \mathrm{pd}_R(M)$.



Satz 9.4. *Sei M endlich-präsentiert mit $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$; dann gilt*

$$M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \ldots \supseteq \Delta^{\mathrm{pd}_R(M)}(M) \supseteq \Delta^{\mathrm{pd}_R(M)+1}(M) = 0 \ ,$$

diese Filtrierung ist unabhängig von der gewählten Auflösung $Q^* \longrightarrow M$ der Länge $\mathrm{pd}_R(M)$ und

$$\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = \textit{ Subquotient von } \mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^p_R(M,R),R) \ .$$

Beweis. Nach obiger Diskussion gilt

$${}^p\,\mathrm{Tot}^\bullet((B)) = 0 \quad \text{und damit} \quad \Delta^p(M) = 0 \quad \text{für } p > \mathrm{pd}_R(M) \ .$$

Die Unabhängigkeit der Filtrierung ergibt sich mit Hilfe der Homotopietheorie für Cartan-Eilenberg-Auflösungen (vgl. [God] Thm. I.4.3.1). Die Aussage über den Subquotienten folgt aus Satz 5.1, §5.h) und Resultat 9.2. $\square$

Zusatz. $\mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^p_R(M,R),R) = {}_{II}E_2^{p,-p}$ *hat den Subquotienten*

$$ {}_{II}E^{p,-p}_{\mathrm{pd}_R(M)+2} = \ldots = {}_{II}E^{p,-p}_\infty = \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \ . $$

Insbesondere: $M/\Delta^1(M) = {}_{II}E^{0,0}_{\mathrm{pd}_R(M)+1} \subseteq {}_{II}E_2^{0,0} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R)$ *ist die Bidualitätsabbildung* δ_M*.*

Definition. *Für endlich-präsentiertes* M *mit* $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$ *heißt* $\Delta^p(M)$ *die Dimensionsfiltrierung von* M*.*

Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$. Nach dem Hauptsatz über abelsche Gruppen haben wir $M = F \oplus E$ mit $F \cong \mathbb{Z}^n$ und endlichem E. Also

$$ \delta_M : M \overset{\mathrm{pr}}{\twoheadrightarrow} M/E \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \ . $$

Aus obigem Zusatz folgt also $\Delta^1(M) = E$. Wegen $\mathrm{gldim}(\mathbb{Z}) = 1$ ist $\mathrm{pd}_\mathbb{Z}(M) \le 1$ und damit $\Delta^2(M) = 0$. Also:

$$ \begin{array}{ll} M & \\ \big\uparrow & \\ \Delta^1(M) = & \text{Torsionsuntergruppe} = \text{alle Elemente endlicher Ordnung} \\ \big\uparrow & \\ \Delta^2(M) = 0 \ . & \end{array} $$

Ist $\mathrm{l.gldim}(R) < \infty$, so besitzt also jeder endlich-präsentierter R-Modul M die Dimensionsfiltrierung. Allgemeiner gilt das unter folgender schwächerer Voraussetzung.

Definition. *Ein linkskohärenter Ring* R *heißt linksregulär, wenn* $\mathrm{pd}_R(I) < \infty$ *für jedes endlich-erzeugte Linksideal* $I \subseteq R$*.*

Bemerkung 9.5. *In jeder kurzen exakten Sequenz von* R*-Moduln* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *hat mit irgend zwei Moduln auch der dritte endliche projektive Dimension.*

Beweis. Betrachte zugehörige lange exakte Ext-Sequenz. □

Satz 9.6. *Ist* R *linksregulär, so gilt* $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$ *für jeden endlich-präsentierten* R*-Modul* M*.*

Beweis. Per Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden (mit Hilfe von Bem. 9.5) genügt es, ein M zu betrachten, welches von einem Element x erzeugt wird. Dann ist die Sequenz

$$ \begin{array}{c} 0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ \qquad r \longmapsto rx \ . \end{array} $$

exakt. Nach Lemma 8.2 ist I endlich-erzeugtes Linksideal. Nach Voraussetzung haben also I und R endlich projektive Dimension. Aus Bem. 9.5 folgt schließlich $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. $\square$

Beispiele. 1. Sei R kommutativ noethersch lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann:

$$R \text{ regulär} \iff \mathrm{Krulldim}(R) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \ .$$

In diesem Falle gilt: $\mathrm{gldim}(R) = \mathrm{pd}_R(R/\mathfrak{m}) = \mathrm{Krulldim}(R)$.

Vgl. [Eis] §10.3, Cor. 19.5., Cor. 19.6, Thm. 19.12 - Theorie des Koszul-Komplexes.

2. Sei R kommutativ noethersch. Dann:

$$R \text{ regulär} \iff R_{\mathfrak{m}} \text{ regulär für alle maximalen Ideale } \mathfrak{m} \subseteq R \ .$$

In diesem Falle gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{gldim}(R) &= \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{gldim}(R_{\mathfrak{m}}) = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{Krulldim}(R_{\mathfrak{m}}) \\ &= \mathrm{Krulldim}(R) \ . \end{aligned}$$

Vgl. [Bas] Cor. III. 6.6 und Prop. III. 6.7.

3. Sei $m \geq 1$ und $G_m := \ker(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$. Der komplettierte Gruppenring $R := \mathbb{Z}_p[[G_m]]$ ist links- und rechts-noethersch und links- und rechtsregulär mit $\mathrm{l.gldim}(R) = \mathrm{r.gldim}(R) = 5$.

10 Stufe und Codimension eines Moduls

Sei R stets links- und rechtskohärent, und sei $M \neq 0$ ein endlich-präsentierter R-Linksmodul endlicher projektiver Dimension $d := \mathrm{pd}_R(M) < \infty$!

Lemma 10.1.

$$\mathrm{Ext}^d_R(M, R) \neq 0 \ .$$

Beweis. Wir werden die Annahme $\mathrm{Ext}^d_R(M, R) = 0$ zum Widerspruch führen.

1. Fall: Sei $d = 0$. Nach Cor. 7.2 ist M endlich-erzeugt projektiv. Also ist δ_M wegen Satz 9.1 ein Isomorphismus. Daraus ergibt sich der Widerspruch $M = 0$.

2. Fall: Sei $d > 0$. Aus der Additivität des Funktors $\mathrm{Ext}^d_R(M, \bullet)$ folgt

$$\mathrm{Ext}^d_R(M, R^m) = 0 \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Zu jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow R^m \longrightarrow N \longrightarrow 0$ ist

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^d_R(M, R^m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^d_R(M, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{d+1}_R(M, L) \arrow[d, equal] \\ 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

exakt. Folglich gilt $\mathrm{Ext}^d_R(M,N) = 0$ für jeden endlich-erzeugten R-Modul N. Sei nun N ein beliebiger R-Modul. Schreibe $N = \cup_{i\in I} N_i$, wobei N_i alle endlich-erzeugten Untermodul von N durchläuft. Da M endlich-erzeugt ist, gilt

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M,N_i)$$

und ebenso für alle Terme in einer endlich-präsentierten projektiven Auflösung von M. Das impliziert $\mathrm{Ext}^d_R(M,N) = \varinjlim_i \mathrm{Ext}^d_R(M,N_i) = 0$ und damit den Widerspruch $\mathrm{pd}_R(M) < d$. □

Definition. *Für einen beliebigen R-Links- oder Rechtsmodul N heißt*

$$j(N) := \min\{q \geq 0 : \mathrm{Ext}^q_R(N,R) \neq 0\}$$

die Stufe (the grade) von N (kann $= \infty$ sein).

Aus Lemma 10.1 folgt

$$0 \leq j(M) \leq \mathrm{pd}_R(M) \ .$$

Um eine bessere obere Abschätzung zu bekommen, betrachten wir die Dimensionsfiltrierung

$$M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \ldots \supseteq \Delta^d(M) \supseteq \Delta^{d+1}(M) = 0 \ .$$

Definition. $\gamma(M) := \max\{p \geq 0 : \Delta^p(M) = M\}$ *heißt die Codimension von M.*

Wegen $M \neq 0$ ist $0 \leq \gamma(M) \leq d = \mathrm{pd}_R(M)$.

Lemma 10.2. *$j(M) \leq \gamma(M) \leq \mathrm{pd}_R(M)$.*

Beweis. Nach Satz 9.4 ist $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ ein Subquotient von

$$\mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^p_R(M,R),R) \ .$$

Folglich ist $\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$ für $p < j(M)$, also $M = \Delta^0(M) = \ldots = \Delta^{j(M)}(M)$ und damit $j(M) \leq \gamma(M)$. □

Bemerkung 10.3. *Für alle $p \geq 0$ gilt:*

i. *$\Delta^p(M)$ und $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ sind endlich-präsentierte R-Linksmoduln;*

ii. *$\mathrm{Ext}^p_R(M,R)$ ist ein endlich-präsentierter R-Rechtsmodul.*

Beweis. Das folgt aus Cor. 8.6 und Satz 9.1. □

Definition. *Man sagt, der Modul M erfüllt die Gorenstein-Bedingung, falls für alle endlich-erzeugten Untermoduln N von $\mathrm{Ext}^p_R(M,R)$ und von $\mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^q_R(M,R),R)$ mit beliebigen $p,q \geq 0$ gilt*

$$j(N) \geq p \ .$$

Satz 10.4. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt:*

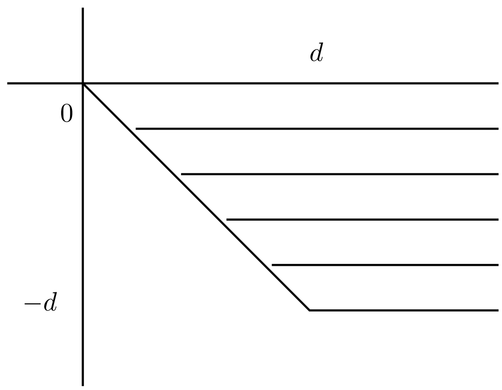
i. $\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^q(M,R),R) = 0$ *für* $p < q$;

ii. $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ *ist ein Untermodul von* $\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R)$,

iii. $j(M) = \gamma(M)$.

Beweis. i. Wir haben $j(\mathrm{Ext}_R^q(M,R)) \geq q$.

ii. Aus i. folgt, daß das ${}_{II}E_2^{pq}$-Tableau aus dem Resultat 9.2 nichtverschwindende Terme nur in dem schraffierten Bereich besitzt:



Folglich ist ${}_{II}E_{r\geq 2}^{p,-p} \subseteq {}_{II}E_2^{p,-p}$. Die Behauptung folgt daraus mit Hilfe des Zusatzes zu Satz 9.4.

iii. Die Gorenstein-Bedingung für den Untermodul in ii. liefert

$$j(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) \geq p \ .$$

Per Induktion mit Hilfe der langen exakten Ext-Sequenz folgt daraus $j(\Delta^p(M)) \geq p$. Wegen $\Delta^{\gamma(M)}(M) = M$ gilt also $j(M) \geq \gamma(M)$ und somit wegen Lemma 10.2 sogar $j(M) = \gamma(M)$. $\square$

Definition. *Der Ring R heißt Auslander-linksregulär, wenn gilt:*

- *R ist links- und rechtskohärent,*
- *R ist linksregulär,*
- *jeder endlich-präsentierte R-Linksmodul erfüllt die Gorenstein-Bedingung.*

Beispiele. 1. Sei R ein kommutativer regulärer noetherscher lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich-erzeugter R-Modul. Setze $n := \mathrm{gldim}(R)$ und $m := \mathrm{Krulldim}(M)$. In [BH] Cor. 3.5.11 finden sich folgende Aussagen:

i. $j(M) + m = n$;

ii. $\mathrm{Krulldim}(\mathrm{Ext}_R^p(M,R)) \leq n - p$.

Sei nun $N \subseteq \mathrm{Ext}^p_R(M,R)$ ein Untermodul. Dann ist

$$\mathrm{Krulldim}(N) \leq \mathrm{Krulldim}(\mathrm{Ext}^p_R(M,R))$$

und somit

$$\begin{aligned} j(N) \underset{i.}{=} n - \mathrm{Krulldim}(N) &\geq n - \mathrm{Krulldim}(\mathrm{Ext}^p_R(M,R)) \\ &\underset{ii.}{\geq} n - (n-p) = p \ . \end{aligned}$$

Folglich ist R Auslander-regulär mit

$$\mathrm{gldim}(R) - \mathrm{Krulldim}(M) = \gamma(M) = j(M)$$

(daher der Name Codimension).

2. Sei R ein kommutativer regulärer noetherscher Ring. Für jeden endlich-erzeugten R-Modul N und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ gilt

$$\mathrm{Ext}^p_R(N,R)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ext}^p_{R_{\mathfrak{m}}}(N_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}})$$

und somit

$$j(N) = \min_{\mathfrak{m}} j(N_{\mathfrak{m}}) \ .$$

Mit R sind auch alle $R_{\mathfrak{m}}$ regulär. Also ist R Auslander-regulär.

3. $R = \mathbb{Z}_p[[G_m]]$ für die Gruppen G_m aus §9 Beispiel 3 ist Auslander-links- und rechtsregulär.

Bemerkung 10.5. *Für jede kurze exakte Sequenz* $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ *von R-Links- oder Rechtsmoduln gilt*

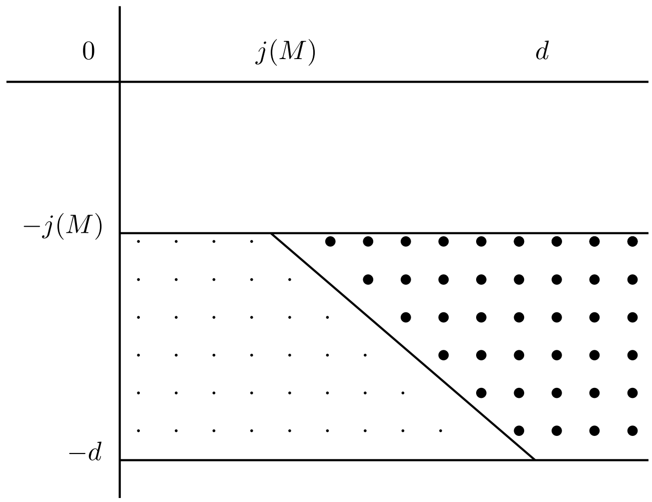
$$j(N) \geq \min(j(N'), j(N''))$$

und

$$j(N'') \geq \min(j(N'), j(N)) \ .$$

Beweis. Betrachte die lange exakte Ext-Sequenz. □

Sei $E^{pq}_r := {}_{II}E^{pq}_r$ die Spektralsequenz aus dem Resultat 9.2. Auf Grund der Definition von $j(M)$ sieht das Tableau E^{pq}_2 und damit alle Tableaus für $r \geq 2$ so aus:



mit nichtverschwindenden Termen höchstens in den punktierten Bereichen. Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so können nichtverschwindende Terme wegen Satz 10.4.i sogar nur in dem fett punktierten Bereich auftreten. Nach Bem. 10.3.ii sind alle Terme E_r^{pq} endlich-präsentiert.

Lemma 10.6. *Für jedes $r \geq 2$ hat man eine exakte Sequenz von R-Moduln*

$$0 \longrightarrow E_{r+1}^{p,-j(M)} \xrightarrow{\subseteq} E_r^{p,-j(M)} \xrightarrow{d_r} S_r^p := \mathrm{im}(d_r) \subseteq E_r^{p+r,-j(M)-r+1} \ ;$$

erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt $j(S_r^p) \geq p+r$.

Beweis. Man vergleiche das Subquotientenargument im Beweis des nachfolgenden Satzes 10.12. □

Lemma 10.7. *M erfülle die Gorenstein-Bedingung; für jedes $p > j(M)$ gilt dann*

$$j(E_r^{p,-j(M)}) \geq p+r \qquad \text{für alle } r \geq 2 \ .$$

Beweis. Nach Satz 5.3 ist $E_\infty^{p,-j(M)}$ ein Subquotient von $h^{p-j(M)}(\mathrm{Tot}^\bullet((B)))$, wobei (B) der in §9 eingeführte Doppelkomplex ist. Dort wurde auch gezeigt, daß die Cohomologie von $\mathrm{Tot}^\bullet((B))$ in allen Graden $\neq 0$ verschwindet. Also folgt $E_\infty^{p,-j(M)} = 0$ für $p > j(M)$. Aus der Form der Tableaus ergibt sich dann $E_r^{p,-j(M)} = E_\infty^{p,-j(M)} = 0$ für alle genügend grossen r. Eine absteigende Induktion nach r unter Benutzung von Lemma 10.6 und Bem. 10.5 liefert schliesslich die Behauptung. □

Definition. *Ein R-Links- oder Rechtsmodul N heißt rein, falls gilt*

$$\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(N,R),R) = 0 \qquad \text{für alle } p \neq j(N) \ .$$

Bemerkung 10.8. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung und ist M rein, so gilt*

$$M = \Delta^{j(M)}(M) \supsetneqq \Delta^{j(M)+1}(M) = 0 \ .$$

Beweis. Das folgt aus Satz 10.4.ii. □

Satz 10.9. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so ist der R-Rechtsmodul $N := \mathrm{Ext}_R^{j(M)}(M,R)$ rein von der Stufe $j(N) = j(M)$.*

Beweis. Wir haben $\mathrm{Ext}_R^p(N,R) = E_2^{p,-j(M)}$. Aus Lemma 10.7 folgt

$$\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(N,R),R) = 0 \qquad \text{für } p > j(M) \ .$$

Andererseits ist $\mathrm{Ext}_R^p(N,R) = 0$ für $p < j(M)$ wegen Satz 10.4.i. Nach Satz 10.4.ii und iii. gilt schließlich $\mathrm{Ext}_R^{j(M)}(N,R) \neq 0$. Also ist $j(N) = j(M)$. □

Bemerkung 10.10. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt*

$$\Delta^d(M) = \mathrm{Ext}_R^d(\mathrm{Ext}_R^d(M,R),R) \ .$$

Beweis. Aus der Form der Tableaus ergibt sich $E_2^{d,-d} = E_{r\geq 2}^{d,-d} = E_\infty^{d,-d} = \Delta^d(M)$. □

Für den Rest des Paragraphen sei R Auslander-links- und rechtsregulär!

Lemma 10.11. $\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R)$ *ist entweder $= 0$ oder rein von der Stufe p.*

Beweis. Setze $N := \mathrm{Ext}_R^p(M,R)$. Nach Bem. 10.3.ii ist N endlich-präsentiert. Aus der Gorenstein-Bedingung für M folgt $j(N) \geq p$. Sei nun

$$\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R) \neq 0 \ ,$$

also $j(N) = p$. Wegen Satz 10.9 (für N statt M) ist dann $\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R) = \mathrm{Ext}_R^{j(N)}(N,R)$ rein von der Stufe $j(N) = p$. □

Satz 10.12. $\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R) = 0$.

Beweis. Die Implikation von rechts nach links folgt aus Satz 10.4.ii. Umgekehrt gelte $\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$. Aus der Form der Tableaus ergeben sich für $r \geq 2$ einerseits exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow E_{r+1}^{p,-p} \longrightarrow E_r^{p,-p} \twoheadrightarrow T_r^p \subseteq E_r^{p+r,-p-r+1}$$

und andererseits

$$E_r^{p+r,-p-r+1} = \text{Subquotient nach endlich-erzeugten Untermoduln von } E_2^{p+r,-p-r+1} \ .$$

Also ist auch

$$T_r^p = \text{Subquotient nach endlich-erzeugten Untermdouln von } E_2^{p+r,-p-r+1} \ .$$

Die Gorenstein-Bedingung impliziert, daß jeder endlich-erzeugte Untermodul von $E_2^{p+r,-p-r+1}$ eine Stufe $\geq p+r$ besitzt. Wegen Bem. 10.5 gilt also

$$j(T_r^p) \geq p+r \geq p+2 \ .$$

Der Zusatz zu Satz 9.4 ergibt $E_{d+2}^{p,-p} = 0$. Eine absteigende Induktion nach r unter Beachtung von Bem. 10.5 liefert nun

$$j(E_2^{p,-p}) \geq p+2 \ .$$

Wegen Lemma 10.11 muss also $E_2^{p,-p} = 0$ gelten. □

Lemma 10.13. *i. Für endlich-erzeugte Untermoduln $M_1 \subseteq M_0 \subseteq M$ gilt*

$$j(M_0/M_1) \geq j(M) \ .$$

ii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $M_0 \subseteq M$ gilt

$$j(M) = \min(j(M_0), j(M/M_0)) \ .$$

Beweis. i. Wegen Bem. 10.5 können wir $M_1 = 0$ annehmen. Wir betrachten die Filtrierung

$$M_0 = \Delta^{\gamma(M)}(M) \cap M_0 \supseteq \Delta^{\gamma(M)+1}(M) \cap M_0 \supseteq \ldots \supseteq \Delta^{d+1}(M) \cap M_0 = 0 \ .$$

Wegen Bem. 10.3 und Cor. 8.6.iii ist dies eine Filtrierung durch endlich-erzeugte Untermoduln. Also ist $\frac{\Delta^p(M)\cap M_0}{\Delta^{p+1}(M)\cap M_0}$ isomorph zu einem endlich-erzeugtem Untermodul von $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \subseteq \mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Ext}_R^p(M,R),R)$. Aus der Gorenstein-Bedingung folgt dann

$$j\Big(\frac{\Delta^p(M) \cap M_0}{\Delta^{p+1}(M) \cap M_0}\Big) \geq p \ ,$$

und Induktion unter Benutzung von Bem. 10.5 $j(M_0) \geq \gamma(M)$. Der Satz 10.4.iii ergibt schliesslich $j(M_0) \geq j(M)$.

ii. Dies folgt aus i. und Bem. 10.5. □

Satz 10.14. *i. $\Delta^p(M)$ ist endlich-präsentiert einer Stufe $\geq p$.*

ii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $L \subseteq M$ gilt $j(L) \geq p$ genau dann, wenn $L \subseteq \Delta^p(M)$.

iii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $L \subseteq M$ gilt

$$\Delta^p(L) = \Delta^p(M) \cap L \ .$$

iv. $\Delta^p(M/\Delta^p(M)) = 0$, *d. h.* $M/\Delta^p(M)$ *besitzt keine endlich-erzeugten Untermoduln* $\neq 0$ *einer Stufe* $\geq p$.

v. $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = 0$ *oder ist rein von der Stufe* p.

Beweis. i. Nach Bem. 10.3.i ist $\Delta^p(M)$ endlich-präsentiert. Mit Hilfe des Beweises von Satz 10.4.iii folgt dann $j(\Delta^p(M)) \geq p$.

ii. Für die Implikation von rechts nach links bemerken wir, daß i. und Lemma 10.13.i für $\Delta^p(M)$ (statt M) zusammen $j(L) \geq j(\Delta^p(M)) \geq p$ implizieren. Für die Umkehrung halten wir zunächst fest, daß die Funktorialität der Spektralsequenz $\Delta^p(L) \subseteq \Delta^p(M)$ impliziert. Andererseits ist $\gamma(L) \geq p$ nach Satz 10.4.iii und damit $L = \Delta^p(L)$. Beides zusammen ergibt $L \subseteq \Delta^p(M)$.

iii. Wieder die Funktorialität der Spektralsequenz ergibt $\Delta^p(L) \subseteq \Delta^p(M) \cap L$. Nach Cor. 8.6.iii ist $\Delta^p(M) \cap L$ endlich-erzeugt in $\Delta^p(M)$. Anwendung von ii. auf M und dann L ergibt zuerst $j(\Delta^p(M) \cap L) \geq p$ und anschließend $\Delta^p(M) \cap L \subseteq \Delta^p(L)$.

iv. Sei $L \subseteq M$ das Urbild von $\Delta^p(M/\Delta^p(M))$, so daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Delta^p(M) \longrightarrow L \longrightarrow \Delta^p(M/\Delta^p(M)) \longrightarrow 0 \ ,$$

exakt ist. Insbesondere ist L endlich-erzeugt. Aus i. und Bem. 10.5 folgt $j(L) \geq \min(p,p) = p$. Aus ii. folgt dann weiter $L \subseteq \Delta^p(M)$ und somit $\Delta^p(M/\Delta^p(M)) = 0$. Wieder wegen ii. besitzt also $M/\Delta^p(M)$ keinen endlich-erzeugten Untermodul $\neq 0$ einer Stufe $\geq p$.

v. (Man beachte, daß alle auftretenden Moduln endlich-präsentiert sind.) Unter Benutzung von iii. und iv. erhalten wir

$$\Delta^{p+1}(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) = \Delta^{p+1}(M/\Delta^{p+1}(M)) \cap \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = 0 \ .$$

Wegen iii. gilt andererseits

$$\Delta^p(\Delta^p(M)) = \Delta^p(M) \cap \Delta^p(M) = \Delta^p(M) \ .$$

Die Funktorialität der Spektralsequenz zeigt, daß

$$\begin{tikzcd}
\Delta^P(M) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \\
\Delta^p(\Delta^p(M)) \arrow[r] & \Delta^p(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Folglich ist $\Delta^p(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) = \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$. Der Modul

$$N := \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$$

erfüllt also

$$N = \Delta^0(N) = \ldots = \Delta^p(N) \supseteq \Delta^{p+1}(N) = 0$$

Aus Satz 10.12 erhalten wir deswegen $\operatorname{Ext}^q_R(\operatorname{Ext}^q_R(N,R),R) = 0$ für alle $q \neq p$. Im Falle $N \neq 0$ folgt $\gamma(N) = p$ und damit $j(N) = p$ wegen Satz 10.4.iii. $\square$

Bemerkung 10.15. *Der Modul M heißt* Cohen-Macaulay, *falls gilt*

$$j(M) = \mathrm{pd}_R(M) \ .$$

In diesem Falle ist das E_2-Tableau der Spektralsequenz eine einzige Zeile und damit

$$\mathrm{Ext}_R^d(\mathrm{Ext}_R^d(M,R),R) = E_2^{d,-d} = E_\infty^{d,-d} = M \ .$$

Insbesondere ist M rein von der Stufe d.

Wir verschärfen unsere Voraussetzungen noch etwas und setzen R als **links- und rechtsnoethersch mit** $\mu :=$ **l.gldim**$(R) < \infty$ **und Auslander-links- und rechtsregulär** voraus.

Bemerkung 10.16. $\mu = \mathrm{id}_R(R)$.

Beweis. Wegen Satz 7.3 gilt $\mathrm{id}_R(R) \leq \mu$. Nach Lemma 10.1 ist $\mathrm{pd}_R(M) \leq \mathrm{id}_R(R)$ für jeden endlich-erzeugten R-Modul M. Schließlich gilt (vgl. [McL] Cor. VII 1.5)

$$\mu = \sup\{\mathrm{pd}_R(M) : M \text{ endlich-erzeugt}\} \ .$$

□

Definition. *Ein endlich-erzeugter R-Modul $M \neq 0$ heißt holonom, falls gilt*

$$j(M) = \mu \ .$$

Ist M holonom, so ist M Cohen-Macaulay mit

$$j(M) = \mathrm{pd}_R(M) = \text{ l.gldim}(R) \ .$$

Nach Bem. 10.15 ist dann

$$M = \mathrm{Ext}_R^\mu(\mathrm{Ext}_R^\mu(M,R),R) \ .$$

Lemma 10.17. *Sei M endlich-erzeugt und $0 \subsetneqq M_0 \subsetneqq M$; dann ist M holonom genau dann, wenn M_0 und M/M_0 holonom sind.*

Beweis. Wegen Lemma 10.13 ist $j(M) = \min(j(M_0), j(M/M_0))$. Außerdem haben wir $j(M), j(M_0), j(M/M_0) \leq \mu$ nach Lemma 10.1. □

Satz 10.18. *Jeder holonome R-Modul M ist von endlicher Länge.*

Beweis. Nach Satz 2.16 ist zu zeigen, daß M artinsch ist. Sei also $M \supsetneqq M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \ldots$ eine echt absteigende Folge von Untermoduln. Wegen Bem. 10.3.ii ist $\mathrm{Ext}_R^\mu(M,R)$ ein endlich-erzeugter R-Rechtsmodul. Nach Lemma 10.17 sind alle M_i und M/M_i holonom. Somit sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^\mu(M/M_i,R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^\mu(M,R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^\mu(M_i,R) \longrightarrow 0$$

exakt. Folglich bilden die $\mathrm{Ext}_R^\mu(M/M_i,R)$ eine echt aufsteigende Folge von Untermoduln in $\mathrm{Ext}_R^\mu(M,R)$. Diese muß abbrechen und damit auch die ursprüngliche Folge. □

Teil IV

Filtrierte Ringe

11 Grundbegriffe

Definition. *Ein Ring R (assoziativ mit Eins) heißt filtrierter Ring, falls eine aufsteigende Folge*

$$\ldots \subseteq F_nR \subseteq F_{n+1}R \subseteq \ldots$$

für $n \in \mathbb{Z}$ von additiven Untergruppen von R gegeben ist mit $1 \in F_0R$ und

$$F_nR \cdot F_mR \subseteq F_{n+m}R \qquad \text{für alle } n,m \in \mathbb{Z}\ .$$

Beachte:

* F_0R ist ein Unterring von R.
* Für $n \leq 0$ ist F_nR ein 2-seitiges Ideal in F_0R.

Beispiele. 1. Die triviale Filtrierung

$$F_nR := \begin{cases} R & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0\ . \end{cases}$$

2. Sei $I \subseteq R$ ein 2-seitiges Ideal; dann heißt

$$F_nR := \begin{cases} R & \text{für } n \geq 0, \\ I^{-n} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

die I*-adische Filtrierung* von R.

3. Der Polynomring $R := S[x_1, \ldots, x_n]$ in r Variablen über einem Ring S ist filtriert durch

$$F_nR := \begin{cases} \text{alle Polynome vom Totalgrad } \leq n & \text{für } n \geq 0\ , \\ 0 & \text{für } n < 0\ . \end{cases}$$

4. Die *Weyl-Algebra* $A_r(k)$ in r Variablen über einem Körper k der Charakteristik 0 ist der nicht-kommutative Polynomring $k[x_1, \ldots, x_r, \partial_1, \ldots, \partial_r]$, wobei die Multiplikation durch die Kommutationsregeln

$$\begin{aligned} x_ix_j &= x_jx_i && \text{für alle } i,j, \\ \partial_i\partial_j &= \partial_j\partial_i && \text{für alle } i,j, \\ x_i\partial_j &= \partial_jx_i && \text{für alle } i \neq j, \\ x_i\partial_i + 1 &= \partial_ix_i && \text{für alle } i \end{aligned}$$

festgelegt ist. Alternativ läßt sich $A_r(k)$ charakterisieren als derjenige Unterring des Endomorphismenrings von $k[x_i, \ldots, x_r]$ als k-Modul, der von den Linksmultiplikationen mit Elementen in $k[x_1, \ldots, x_n]$ sowie den partiellen Ableitungen $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ erzeugt wird. Jedes Element $p \in A_r(k)$ schreibt sich eindeutig als endliche Summe

$$p = \sum_{n_1,\ldots,n_{2r} \geq 0} s_{n_1,\ldots,n_{2r}} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} \cdot \partial_1^{n_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \partial_r^{n_{2r}}$$

und hat also einen Totalgrad $\deg(p) := \max\{n_1 + \ldots + n_{2r} : s_{n_1,\ldots,n_{2r}} \neq 0\}$. Definiere

$$F_n A_r(k) := \begin{cases} \{p \in A_r(k) : \deg(p) \leq n\} & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

(Der 2. Fall ist wegen $\deg(0) = -\infty$ eigentlich im 1. Fall enthalten.)

Sei R im Folgenden ein filtrierter Ring.

Definition. *Ein R-Linksmodul M heißt filtrierter R-Modul, falls eine aufsteigende Folge*

$$\ldots \subseteq F_n M \subseteq F_{n+1} M \subseteq \ldots$$

für $n \in \mathbb{Z}$ von additiven Untergruppen von M gegeben ist mit

$$F_n R \cdot F_m M \subseteq F_{n+m} M \qquad \textit{für alle } n, m \in \mathbb{Z}\ .$$

Beachte:

- $*$ Alle $F_n M$ sind $F_0 R$-Untermoduln von M.
- $*$ Wir befolgen hier eine andere Konvention als in §5.

Definition. *Die Filtrierung $F_\bullet M$ von M heißt*

$$\begin{aligned} \textit{ausschöpfend,} \quad & \textit{falls } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n M = M, \\ \textit{separiert,} \quad & \textit{falls } \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n M = 0, \\ \textit{diskret,} \quad & \textit{falls } F_n M = 0 \textit{ für } n << 0, \\ \textit{vollständig,} \quad & \textit{falls } M \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{n \in \mathbb{Z}} M/F_{-n} M. \end{aligned}$$

Beachte:

- $*$ Ist $F_\bullet R$ ausschöpfend, so ist $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n M$ ein R-Untermodul von M.

* Der projektive Limes in der Definition von "vollständig" wird von der Folge von Projektionsabbildungen

$$\ldots \longrightarrow M/F_{-1}M \longrightarrow M/F_0M \longrightarrow M/F_1M \longrightarrow \ldots$$

gebildet.

Im Folgenden besprechen wir diverse Konstruktionen im Kontext von filtrierten Moduln.

A) Sei M_i eine Familie von filtrierten R-Linksmoduln. Dann ist $\oplus_{i\in I} M_i$ filtriert durch

$$F_n(\oplus_i M_i) := \oplus_i F_n M_i \ .$$

Es gilt: $F_\bullet(\oplus_i M_i)$ ausschöpfend bzw. separiert genau dann, wenn alle $F_\bullet M_i$ ausschöpfend bzw. separiert sind.

B) Sei M_i eine Familie von filtrierten R-Linksmoduln. Dann ist $\prod_{i\in I} M_i$ filtriert durch

$$F_n(\prod_i M_i) := \prod_i F_n M_i \ .$$

Es gilt: $F_\bullet(\prod_i M_i)$ ist separiert genau dann, wenn alle $F_\bullet M_i$ separiert sind.

C) Seien M, N zwei filtrierte R-Linksmoduln.

Definition. *Ein R-Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ ist vom Grade $\leq p$, falls*

$$f(F_n M) \subseteq F_{n+p} N \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Es gilt:

* Ist $L \xrightarrow{g} M$ vom Grade $\leq p$ und $M \xrightarrow{f} N$ vom Grade $\leq q$, so ist $L \xrightarrow{f\circ g} N$ vom Grade $\leq p+q$.
* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist eine filtrierte abelsche Gruppe durch

$$F_n \mathrm{Hom}_R(M, N) := \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) : f \text{ vom Grade } \leq n\}.$$

D) Die Kategorie der filtrierten R-Linksmoduln:

Definition. *Ein Homomorphismus von filtrierten R-Moduln $f : M \longrightarrow N$ ist ein R-Modulhomomorphismus vom Grade ≤ 0.*

Sei $f \in F_0 \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann ist:

- $\ker(f)$ filtriert durch $F_n \ker(f) := \ker(f) \cap F_n M$;
- $\mathrm{im}(f)$ filtriert durch $F_n \mathrm{im}(f) := \mathrm{im}(f) \cap F_n N$;
- $\mathrm{coker}(f)$ filtriert durch $F_n \mathrm{coker}(f) := \big(F_n N + \mathrm{im}(f)\big)/\mathrm{im}(f)$.

Die Kategorie der filtrierten R-Moduln ist im Allgemeinen nicht abelsch! Der Homomorphiesatz gilt nämlich nicht: Die kanonische Abbildung

$$\bar{f} : M/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$$

ist zwar bijektiv und vom Grade ≤ 0, denn

$$\bar{f}(F_n(M/\ker(f))) = \bar{f}((F_nM + \ker(f))/\ker f) \subseteq F_n \, \mathrm{im}(f) \ .$$

Aber sie ist kein Isomorphismus, falls $f(F_nM) \subsetneqq \mathrm{im}(f) \cap F_nN$.

Beispiel. Der Ring R trage die triviale Filtrierung. Wir versehen einen R-Modul $M \neq 0$ einmal mit der Filtrierung $0 = F_{-1}M \subseteq F_0M = M$ und einmal mit der Filtrierung $0 = F_{-2}M \subseteq F_{-1}M = M$. Dann ist id_M ein bijektiver Homomorphismus, aber kein Isomorphismus von filtrierten R-Moduln.

Aus dem filtrierten Ring R kann man einen neuen "einfacheren" Ring - den *zugehörigen graduierten Ring* - bilden:

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_n(R) &:= F_nR/F_{n-1}R \\ \mathrm{gr}(R) &:= \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \, \mathrm{gr}_n(R) \quad \text{als additive Gruppe} \end{aligned}$$

mit der Multiplikation

$$\big(\sum_n (a_n + F_{n-1}R)\big)\big(\sum_m (b_m + F_{m-1}R)\big) := \sum_k \big((\sum_{n+m=k} a_nb_m) + F_{k-1}R\big) \ .$$

Beispiel. $\mathrm{gr}(A_r(k)) = k[x_1, \ldots, x_r, \partial_1, \ldots, \partial_r]$ ist der kommutative Polynomring, da $x_i\partial_i \equiv \partial_i x_i \mod F_1A_r(k)$ gilt.

Analog konstruieren wir zu jedem filtrierten R-Modul M den *zugehörigen graduierten* $\mathrm{gr}(R)$*-Modul* durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_n(M) &:= F_nM/F_{n-1}M \\ \mathrm{gr}(M) &:= \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \, \mathrm{gr}_n(M) \quad \text{als additive Gruppe} \end{aligned}$$

mit der Skalarmultiplikation

$$\big(\sum_n (a_n + F_{n-1}R)\big)\big(\sum_m (x_m + F_{m-1}M)\big) := \sum_k \big((\sum_{n+m=k} a_nx_m) + F_{k-1}M\big) \ .$$

Dies führt auf folgende allgemeine Konzepte.

Definition. *Ein Ring S (assoziativ mit 1) heißt graduiert, falls $S = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}S_n$ als additive Gruppe mit $S_n \cdot S_m \subseteq S_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.*

Beachte: $1 \in S_0$, und S_0 ist ein Unterring von S.

Definition. *Sei S ein graduierter Ring; ein S-Linksmodul M heißt graduierter S-Modul, falls $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$ als additive Gruppe mit $S_n \cdot M_m \subseteq M_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.*

Die Elemente in M_n heißen *homogen vom Grade* n. Jedes $x \in M$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$$

in seine *homogenen Komponenten* $x_n \in M_n$.

E) Die Kategorie der graduierten S-Moduln

Sei S ein graduierter Ring, und seien M und N zwei graduierte S-Moduln.

Definition. *i. Ein S-Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ heißt vom Grade p, falls gilt*

$$f(M_n) \subseteq N_{n+p} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

ii. Ein Homomorphismus von graduierten S-Moduln ist ein S-Modulhomomorphismus vom Grade 0.

Hat $f \neq 0$ einen Grad, so ist dieser eindeutig bestimmt. Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von graduierten S-Moduln; dann ist:

– $\ker(f)$ graduiert durch $\ker(f)_n := M_n \cap \ker(f)$,

– $\operatorname{im}(f)$ graduiert durch $\operatorname{im}(f)_n := N_n \cap \operatorname{im}(f)$,

– $\operatorname{coker}(f)$ graduiert durch $\operatorname{coker}(f)_n := \big(N_n + \operatorname{im}(f)\big)/\operatorname{im}(f) \cong N_n/f(M_n)$.

Übungsaufgabe. *Der Homomorphiesatz gilt. Also ist die Kategorie der graduierten S-Moduln abelsch.*

Lemma 11.1. *Seien*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\ M & \xrightarrow[\alpha]{} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

graduierte S-Moduln und Homomorphismen von graduierten S-Moduln, wobei α surjektiv ist; ist P projektiv als S-Modul, so existiert ein Homomorphismus von graduierten S-Moduln $\tilde{\beta} : P \longrightarrow M$ mit $\alpha \circ \tilde{\beta} = \beta$.

Beweis. Es existiert jedenfalls ein S-Modulhomomorphismus $\beta' : P \longrightarrow M$ mit $\alpha \circ \beta' = \beta$. Definiere

$$\tilde{\beta}\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n\Big) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta'(p_n)_n \ .$$

$\square$

F) Der Funktor "filtriert" zu "graduiert"

Sei R ein filtrierter Ring. Auf Objekten haben wir den Funktor

$$\begin{matrix} \text{Kategorie der} \\ \text{filtrierten } R\text{-Moduln} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \text{Kategorie der} \\ \text{graduierten } \mathrm{gr}(R)\text{-Moduln} \end{matrix}$$
$$M \longmapsto \mathrm{gr}(M)$$

schon konstruiert. Sei $f \in F_0 \operatorname{Hom}_R(M, N)$, also $f(F_n M) \subseteq F_n N$. Somit sind

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_n(f) : \mathrm{gr}_n(M) = F_n M / F_{n-1} M &\longrightarrow \mathrm{gr}_n(N) = F_n N / F_{n-1} N \\ x + F_{n-1} M &\longmapsto f(x) + F_{n-1} N \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{gr}(f) := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{gr}_n(f) : \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(N)$$

wohldefniert. Man rechnet leicht nach, daß $\mathrm{gr}(f)$ ein Homomorphismus von graduierten Moduln ist. Weiter gilt:

1) $\mathrm{gr}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathrm{gr}(M)}$,
2) $\mathrm{gr}(f \circ g) = \mathrm{gr}(f) \circ \mathrm{gr}(g)$.

Beachte: Ist $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert, so gilt: $M = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{gr}(M) = 0$.

Definition. *i. Ein Homomorphismus $f \in F_0 \operatorname{Hom}_R(M, N)$ von filtrierten R-Moduln heißt strikt, wenn gilt $f(F_n M) = \mathrm{im}(f) \cap F_n N$ und $f(F_n M) = F_n \mathrm{im}(f)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

ii. Eine Sequenz $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ (von Homomorphismen) von filtrierten R-Moduln heißt strikt-exakt, falls sie exakt ist und f und g strikt sind.

Satz 11.2. *Sei*

$$L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \tag{5}$$

eine Sequenz von filtrierten R-Moduln mit $f \circ g = 0$, und sei

$$\mathrm{gr}(L) \xrightarrow{\mathrm{gr}(g)} \mathrm{gr}(M) \xrightarrow{\mathrm{gr}(f)} \mathrm{gr}(N) \tag{6}$$

die zugehörige Sequenz von graduierten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln (mit $\mathrm{gr}(f) \circ \mathrm{gr}(g) = 0$); dann gilt

i. Ist (5) strikt-exakt, so ist (6) exakt;

ii. ist (6) exakt und $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist f strikt;

iii. ist (6) exakt, $F_\bullet L$ vollständig und $F_\bullet M$ separiert, so ist g strikt;

iv. ist (6) exakt und $F_\bullet M$ diskret, so ist g strikt;

v. es gelte:

(a) $F_\bullet L$ *ist vollständig und* $F_\bullet M$ *ausschöpfend und separiert*

oder

(b) $F_\bullet M$ *ist ausschöpfend und diskret;*

dann ist (5) *strikt-exakt genau dann, wenn* (6) *exakt ist.*

Beweis. i. Sei $x + F_{n-1}M \in \ker(\mathrm{gr}_n(f))$, also $f(x) \in F_{n-1}N$. Wegen der Striktheit von f existiert ein $x' \in F_{n-1}M$ mit $f(x) = f(x')$. Also $x - x' \in \ker(f) \cap F_nM = \mathrm{im}(g) \cap F_nM$. Wegen der Striktheit von g existiert weiter ein $z \in F_nL$ mit $g(z) = x - x'$. Es folgt $\mathrm{gr}_n(g)(y + F_{n-1}L) = x - x' + F_{n-1}M = x + F_{n-1}M$.

ii. Sei $y \in \mathrm{im}(f) \cap F_nN$. Wir wählen ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, gilt $x \in F_{n+s}M$ für ein $s \geq 0$. Ist $s = 0$, so sind wir fertig. Sei also $s > 0$. Dann

$$\mathrm{gr}_{n+s}(f)(x + F_{n+s-1}M) = y + F_{n+s-1}N = 0 + F_{n+s-1}N \ .$$

Wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z \in F_{n+s}L$ mit

$$gr_{n+s}(g)(z + F_{n+s-1}L) = x + F_{n+s-1}M \ .$$

Also haben wir ein $x_1 := x - g(z) \in F_{n+s-1}M$ gefunden mit $y = f(x) = f(x - g(z)) = f(x_1)$. Induktiv konstruieren wir so ein $x_s \in F_nM$ mit $f(x_s) = y$.

iii. und iv. Sei $x \in \mathrm{im}(g) \cap F_nM$, also insbesondere $f(x) = 0$. wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z_n \in F_nL$ mit $\mathrm{gr}_n(g)(z_n + F_{n-1}L) = x + F_{n-1}M$. Dann $x - g(z_n) \in \mathrm{im}(g) \cap F_{n-1}M$. Induktiv finden wir also für jedes $s \geq 0$ ein $z_{n-s} \in F_{n-s}L$ mit

$$x - g(z_n + z_{n-1} + \ldots + z_{n-s}) \in F_{n-s-1}M \ .$$

Setze

$$y_s := z_n + z_{n-1} + \ldots + z_{n-s} \in F_nL \ .$$

Dann haben wir:

1) $x - g(y_s) \in F_{n-s-1}M$,
2) Die Projektionsabbildung $L/F_{n-s-2}L \to L/F_{n-s-1}L$ bildet $y_{s+1} + F_{n-s-2}L$ ab auf $y_s + F_{n-s-1}L$.

1. Fall: Sei $F_\bullet M$ diskret. Dann ist $F_{n-s-1}M = 0$ für genügend großes s und damit $x = g(y_s)$ mit $y_s \in F_nL$ wegen 1). *2. Fall:* Sei $F_\bullet L$ vollständig und $F_\bullet M$ separiert. Wegen der Vollständigkeit von $F_\bullet L$ folgt aus 2) die Existenz genau eines $z \in L$ mit

$$z - y_s \in F_{n-s-1}L \qquad \text{für alle } s \geq 0 \ ,$$

und insbesondere $z \in F_nL$ (“$z = \sum_{s=0}^{\infty} z_{n-s}$”). Mit 1) folgt weiter

$$g(z) - x = g(z - y_s) + g(y_s) - x \in g(F_{n-s-1}L) + F_{n-s-1}M \subseteq F_{n-s-1}M$$

für alle $s \geq 0$. Die Separiertheit von $F_\bullet M$ impliziert dann $g(z)-x=0$, also $x=g(z)$ mit $z \in F_n L$.

v. Wegen i. bleibt die Implikation von rechts nach links zu zeigen. Nach ii. - iv. sind g und f strikt. Sei also $x \in M$ mit $f(x)=0$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, gilt $x \in F_n M$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z_n \in F_n L$ mit

$$\mathrm{gr}_n(g)(z_n + F_{n-1}L) = x + F_{n-1}M \ .$$

Dann ist $x - g(z_n) \in F_{n-1}M$ mit $f(x-g(z_n))=0$. Induktiv fortfahrend finden wir für jedes $s \geq 0$ ein $z_{n-s} \in F_{n-s}L$ mit

$$x - g(z_n + z_{n-1} + \ldots + z_{n-s}) \in F_{n-s-1}M \ .$$

Im Fall (b) ist $F_{n-s-1}M = 0$ für genügend großes s und damit $x = g(z_n + \ldots + z_{n-s}) \in \mathrm{im}(g)$. Im Fall (a) impliziert die Vollständigkeit von $F_\bullet L$, daß das Element $z := {}''\sum_{n=0}^{\infty} z_{n-s}{}'' \in L$ wohldefiniert ist. Wegen der Separiertheit von $F_\bullet M$ muß schließlich $x = g(z)$ gelten. □

Corollar 11.3. *Sei $f : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von filtrierten R-Moduln, sei $F_\bullet M$ ausschöpfend und vollständig, und sei $F_\bullet N$ ausschöpfend und separiert; dann gilt:*

$$\mathrm{gr}(f) \ \textit{bijektiv} \quad \Longrightarrow \quad f \ \textit{bijektiv} \ .$$

12 Übertragung von Endlichkeitseigenschaften

Sei R ein filtrierter Ring.

Definition. *Ein filtrierter R-Modul M heißt filt-frei, falls eine R-Basis $\{x_i\}_{i\in I}$ von M und ganze Zahlen $\{m_i\}_{i\in I}$ existieren mit*

$$F_n M = \oplus_{i\in I} F_{n-m_i} R \cdot x_i \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Die Menge $\{(x_i, m_i)\}_{i\in I}$ heißt dann eine filt-Basis von M.

Beachte:

- $x_i = 1 \cdot x_i \in F_0 R \cdot x_i \subseteq F_{m_i} M$.
- $x_i \notin F_{m_i-1} M$, falls $1 \notin F_{-1} R$.
  Denn sonst ist $x_i = \sum_{j\in I} a_j x_j$ mit $a_j \in F_{m_i-1-m_j} R$, und aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $1 = a_i \in F_{-1} R$.
  (Übrigens folgt aus $1 \in F_{-1}R$, daß $F_n R = F_0 R$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.)
- Sei $\bar{x}_i := x_i + F_{m_i-1} M \in \mathrm{gr}_{m_i}(M)$. Dann ist

  $$\mathrm{gr}_n(M) = \oplus_i \, \mathrm{gr}_{n-m_i}(R) \cdot \bar{x}_i$$

  und somit

  $$\mathrm{gr}(M) = \oplus_n \, \mathrm{gr}_n(M) = \oplus_n \oplus_i \, \mathrm{gr}_{n-m_i}(R) \cdot \bar{x}_i = \oplus_i \, \mathrm{gr}(R) \cdot \bar{x}_i$$

  (mit "eindeutigen Koeffizienten"). Also ist $\mathrm{gr}(M)$ ein freier $\mathrm{gr}(R)$-Modul mit Basis $\{\bar{x}_i\}_{i\in I}$.

Lemma 12.1. *Sei M filt-frei mit filt-Basis $\{(x_i, m_i)\}_{i\in I}$; dann gilt:*

i. Gegeben seien ein $p \in \mathbb{Z}$ und Elemente $y_i \in F_{p+m_i}N$ in einem filtrierten R-Modul N; dann existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ vom Grade $\leq p$ mit

$$f(x_i) = y_i \qquad \text{für alle } i \in I \ ;$$

ii. ist N ein weiterer filtrierter R-Modul und $\bar{f} : \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(N)$ ein $\mathrm{gr}(R)$-Modulhomomorphismus vom Grade p, so existiert ein R-Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ vom Grade $\leq p$ mit $\mathrm{gr}(f) = \bar{f}$.

Beweis. i. Dies ist klar. ii. Wir wählen Elemente $y_i \in F_{p+m_i}N$ mit $\bar{f}(\bar{x}_i) = y_i + F_{p+m_i-1}N$ und wenden i. an. □

Lemma 12.2. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend, und sei M ein filtrierter R-Modul mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet M$; dann existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R-Moduln*

$$\ldots \longrightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \ldots \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\delta^0} M \longrightarrow 0 \ ,$$

in welcher alle P^q filt-frei sind; sind $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ diskret, so können zusätzlich auch alle $F_\bullet P^q$ diskret gewählt werden.

Beweis. Setze $I_m := F_mM \setminus \{0\}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und bezeichne I die disjunkte Vereinigung aller I_m. Wir definieren einen filt-freien R-Modul P^0 durch

$$P^0 := \oplus_m \oplus_{x\in I_m} R \quad \text{und} \quad F_nP^0 := \oplus_m \oplus_{x\in I_m} F_{n-m}R$$

sowie einen Homomorphismus von filtrierten R-Moduln

$$\begin{aligned} \delta^0 : \qquad & P^0 \longrightarrow M \\ (a_{m,x})_{m,x} & \longmapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{x\in I_m} a_{m,x}\, x \ . \end{aligned}$$

Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, ist δ^0 surjektiv. Wir haben

$$F_nM \setminus \{0\} \subseteq \sum_{x\in F_nM\setminus\{0\}} F_0R \cdot x \subseteq \delta^0(F_nP^0) = \sum_m \sum_{x\in F_m(M)\setminus\{0\}} F_{n-m}R \cdot x \subseteq F_nM$$

und folglich $\delta^0(F_nP^0) = F_nM$. Dies zeigt, daß δ^0 strikt. Existiert außerdem ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $F_nR = 0$ und $F_nM = 0$ für alle $n < N$, so ist

$$F_nP^0 = \oplus_{m\geq N} \oplus_{x\in I_m} F_{n-m}R = 0 \qquad \text{für } n < 2N \ .$$

Mit $F_\bullet R$ sind $F_\bullet P^0$ und dann auch $F_\bullet(\ker\delta^0)$ ausschöpfend. Wir können also diese Konstruktion für $\ker\delta^0$ wiederholen und auf diese Weise induktiv die gewünschte Sequenz konstruieren. □

Sei S ein graduierter Ring und N graduierter S-Modul. Durch "Verschieben" der Graduierung definieren wir zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ einen neuen graduierten S-Modul $N(m)$ durch $N(m) := N$ als S-Modul und $N(m)_n := N_{n+m}$.

Analog sei M ein filtrierter R-Modul. Zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ haben wir dann den filtrierten R-Modul $M(m)$ gegeben durch $M(m) := M$ als R-Modul und $F_n(M(m)) := F_{n+m}M$.

Beachte:

i. Ist S ein graduierter Ring und $f : N_1 \longrightarrow N_2$ ein S-Modulhomomorphismus vom Grade p, so ist $f : N_1(-p) \longrightarrow N_2$ ein Homomorphismus von graduierten S-Moduln.

ii. Ist $f : M_1 \longrightarrow M_2$ ein R-Modulhomomorphismus vom Grade $\leq p$, so ist $f : M_1(-p) \longrightarrow M_2$ ein Homomorphismus von filtrierten R-Moduln.

iii. $\mathrm{gr}(M(m)) = \mathrm{gr}(M)(m)$.

iv. M ist filt-frei über der filt-Basis $\{(x_i, m_i)\}_{i\in I}$ genau dann, wenn

$$M \cong \oplus_{i\in I} R(-m_i)$$

gilt im Sinne von filtrierten R-Moduln.

Konstruktion 12.3. *Gegeben sei ein filtrierter R-Modul M, so daß $\mathrm{gr}(M)$ endlich-erzeugt ist als $\mathrm{gr}(R)$-Modul; weiter gelte:*

(a) $F_\bullet R$ ist vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert

oder

(b) $F_\bullet M$ ist ausschöpfend und diskret.

Wir wählen homogene Erzeugende $\bar{x}_i = x_i + F_{n_i-1}M \in \mathrm{gr}_{n_i}(M)$ für $i = 1, \ldots, r$ von $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(R)$-Modul. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(R)(-n_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{gr}(R)(-n_r) &\longrightarrow \mathrm{gr}(M) \\ (\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_r}) &\longmapsto \bar{a_1}\bar{x_1} + \ldots + \bar{a_r}\bar{x_r} \end{aligned}$$

ein surjektiver Homomorphismus von graduierten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln von der Form $\mathrm{gr}(\delta^0)$ zu dem Homomorphismus von filtrierten R-Moduln

$$\begin{aligned} \delta^0 : P^0 := R(-n_1) \oplus \ldots \oplus R(-n_r) &\longrightarrow M \\ (a_1, \ldots, a_r) &\longmapsto a_1x_1 + \ldots + a_rx_r \ . \end{aligned}$$

Per Konstruktion ist P^0 endlich-erzeugt und filt-frei. Ist $F_\bullet R$ vollständig, so ist es auch $F_\bullet P^0$. Aus Satz 11.2.v folgt also: $\delta^0 : P^0 \twoheadrightarrow M$ ist strikt und surjektiv; insbesondere ist M endlich-erzeugt (von höchstens r Elementen).

Satz 12.4. *Sei M ein filtrierter R-Modul, so daß $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(R)$-Modul endlich-präsentiert ist; weiter sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert (z. B. falls $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret sind). Dann existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R-Moduln*

$$P^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\delta^0} M \longrightarrow 0$$

mit P^0, P^{-1} endlich-erzeugt und filt-frei; insbesondere ist M endlich-präsentiert. Ist $\mathrm{gr}(R)$ darüberhinaus linkskohärent, so existiert sogar eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R-Moduln

$$\ldots \longrightarrow P^q \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit P^q endlich-erzeugt und filt-frei für alle $q \leq 0$.

Beweis. Sei $P^0 \overset{\delta^0}{\twoheadrightarrow} M$ wie in 12.3 konstruiert. Setze $L := \ker(\delta^0)$ als filtrierter R-Modul. Mit $F_\bullet R$ ist auch $F_\bullet P^0$ und damit $F_\bullet L$ ausschöpfend und separiert. Weiter ist

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\subseteq} P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

per Konstruktion strikt-exakt. Nach Satz 11.2.i ist auch

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}(L) \longrightarrow \mathrm{gr}(P^0) \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \longrightarrow 0$$

exakt. Aus Lemma 8.2 (bzw. Satz 8.5) folgt dann, daß $\mathrm{gr}(L)$ endlich-erzeugt (bzw. endlich-präsentiert) ist. Wir wiederholen nun Konstruktion 12.3 für L statt M und fahren gegebenenfalls induktiv fort. $\square$

Satz 12.5. *Sei M ein filtrierter R-Modul, und sei*

(a) $F_\bullet R$ vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert

oder

(b) $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret;

dann gilt:

$$\mathrm{gr}(M) \text{ ist noetherscher } \mathrm{gr}(R)\text{-Modul} \implies M \text{ ist noetherscher } R\text{-Modul}.$$

Beweis. Sei $N \subseteq M$ ein R-Untermodul betrachtet als filtrierter Untermodul. Also ist die Inklusionsabbildung $N \xrightarrow{\subseteq} M$ strikt. Außerdem erfüllt $F_\bullet N$ ebenfalls (a) oder (b). Wegen Satz 11.2.i ist $\mathrm{gr}(N) \hookrightarrow \mathrm{gr}(M)$ auch injektiv. Auf Grund der Voraussetzung ist $\mathrm{gr}(N)$ also endlich-erzeugt. In 12.3 haben wir gesehen, daß dann auch N endlich-erzeugt ist. $\square$

Corollar 12.6. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig; dann gilt:*

$$\mathrm{gr}(R) \text{ ist linksnoethersch} \implies R \text{ ist linksnoethersch.}$$

Beweis. Wende Satz 12.5 auf $M = R$ an. $\square$

Anwendung. *Die Weyl-Algebren $A_r(k)$ sind (links)noethersch.*

Definition. *Ein filtrierter R-Modul P heißt filt-projektiv, wenn es zu jedem Diagramm von filtrierten R-Moduln*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\tilde\beta"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

wobei α strikt und surjektiv ist, einen Homomorphismus von filtrierten R-Moduln $\tilde\beta : P \longrightarrow M$ mit $\alpha \circ \tilde\beta = \beta$ gibt.

Beachte: Wegen Lemma 12.1.i ist jeder filt-freie Modul auch filt-projektiv.

Lemma 12.7. *Sei P ein filtrierter R-Modul mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet P$. Dann ist P filt-projektiv genau dann, wenn P isomorph ist zu einem direkten Summanden (im Sinne filtrierter R-Moduln) eines filt-freien R-Moduls. Insbesondere ist jeder filt-projektive Modul P auch projektiv.*

Beweis. Ist $P \oplus P'$ (mit einem geeigneten weiteren filtrierten R-Modul P') filt-frei, so ergänzen wir ein gegebenes Testdiagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\beta"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

zu dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \oplus P' \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\beta+0"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und definieren $\tilde\beta := \gamma | P$.

Für die umgekehrte Implikation nehmen wir P jetzt als filt-projektiv an. Im ersten Teil des Beweises von Lemma 12.2, in welchem die dortige Voraussetzung "$F_\bullet R$ ausschöpfend" noch nicht gebraucht wurde, haben wir gesehen, daß ein filt-freier R-Modul P^0 zusammen mit einem strikten surjektiven Homomorphismus von filtrierten R-Moduln $\delta^0 : P^0 \twoheadrightarrow P$ existiert. Aus dem Testdiagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, equal] & \\ P^0 \arrow[r, "\delta^0"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

erhalten wir dann einen Homomorphismus von filtrierten R-Moduln $\gamma : P \longrightarrow P^0$ mit $\delta^0 \circ \gamma = \mathrm{id}_P$. Offensichtlich gilt

$$P^0 = \mathrm{im}(\gamma) \oplus \ker(\delta^0) \ .$$

als R-Moduln. Wir prüfen zunächst nach, daß γ strikt ist. Dazu sei $x \in F_n P^0 \cap \mathrm{im}(\gamma)$ bzw. $x = \gamma(y) \in F_n P^0$ für ein $y \in P$. Es folgt $y = \delta^0(\gamma(y)) = \delta^0(x) \in F_n P$ und somit $x \in \gamma(F_n P)$. Es bleibt zu zeigen, daß

$$F_n P^0 = F_n P^0 = F_n P^0 \cap \mathrm{im}(\gamma) + F_n P^0 \cap \ker(\delta^0) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

gilt. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Sei also umgekehrt $x = y + z \in F_n P^0$ mit $y = \gamma(y') \in \mathrm{im}(\gamma)$ und $z \in \ker(\delta^0)$. Dann

$$y' = \delta^0(\gamma(y')) = \delta^0(y) = \delta^0(x) \in F_n P \ ,$$

also

$$y = \gamma(y') \in \gamma(F_n P) \subseteq F_n P^0 \cap \mathrm{im}(\gamma)$$

und somit

$$z = x - y \in F_n P^0 \cap \ker(\delta^0) \ .$$

□

Im Folgenden wollen wir die projektiven Dimensionen von M und $\mathrm{gr}(M)$ vergleichen. Dazu müssen wir aber etwas ausholen. Sei M ein filtrierter R-Modul. Dann:

* $F_0 \operatorname{End}_R(M)$ ist ein Ring bzgl. Komposition.
* $\operatorname{End}^0_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) := \{\alpha \in \operatorname{End}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) : \alpha \text{ hat Grad } 0\}$ ist ein Ring bzgl. Komposition.
* Die Abbildung

$$\begin{aligned} F_0 \operatorname{End}_R(M) &\longrightarrow \operatorname{End}^0_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) \\ f &\longmapsto \mathrm{gr}(f) \end{aligned}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit Kern $F_{-1} \operatorname{End}_R(M)$.

Wir erinnern auch daran, daß ein Element e eines Ringes S *idempotent* heißt, falls $e^2 = e$.

Lemma 12.8. *Sei M ein filtrierter R-Modul, und sei $F_\bullet M$ ausschöpfend und vollständig; weiter sei $f \in F_0 \operatorname{End}_R(M)$, so daß $\mathrm{gr}(f)$ idempotent ist; dann existiert ein idempotentes und striktes $g \in F_0 \operatorname{End}_R(M)$ mit $\mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(f)$.*

Beweis. Wegen $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(f)^2 = \mathrm{gr}(f^2)$ ist $\mathrm{gr}(f^2 - f) = 0$. Folglich ist $h := f^2 - f$ vom Grade ≤ -1 und damit h^n vom Grade $\leq -n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $x \in M$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, finden wir ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $x \in F_m M$. Dann gilt $h^n(x) \in F_{m-n}M$ für alle $n \geq 0$. Beachten wir, daß $\binom{2n}{n}$ als "mittlerer" Koeffizient der Binomialentwicklung von $(1-1)^{2n} = 0$ eine gerade ganze Zahl sein muss, so ist also

$$x_\infty := \sum_{1 \leq n < k} (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \binom{2n}{n} h^n(x) \in \varprojlim_{k \geq 1} F_{m-1}M/F_{m-k}M$$

ein wohldefiniertes Element. Dadurch erhalten wir einen R-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} l_\infty : M &\longrightarrow \varprojlim_{k \geq 1} M/F_k M \\ x &\longmapsto x_\infty \ . \end{aligned}$$

Aus der Vollständigkeit von $F_\bullet M$ folgt dann die Existenz des schrägen Pfeils in dem kommutativen Diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\cong"] \\ M \arrow[ur, dashed, "l"] \arrow[r, "l_\infty"'] & \varprojlim_{k \geq 0} M/F_{-k}M. \end{tikzcd}$$

Per Konstruktion gilt $l \in F_{-1}\,\mathrm{End}_R(M) \subseteq F_0\,\mathrm{End}_R(M)$ und $l \circ f = f \circ l$. Wir definieren nun

$$g := f + l \circ (\mathrm{id}_M - 2f) \ .$$

Es gilt $g \in F_0\,\mathrm{End}_R(M)$ und $\mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(f)$ (beachte $l \in F_{-1}$ und $\mathrm{id}_M - 2f \in F_0$, also $l \circ (\mathrm{id}_M - 2f) \in F_{-1}$). Um zu beweisen, daß g idempotent ist, benutzen wir die Identität

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 1}} \binom{2n}{n}\binom{2m}{m} + 2 \cdot \binom{2k}{k} = 4^k \ .$$

Dazu überlegt man sich zuerst induktiv, daß $\binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n}$ gilt und rechnet dann

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 1}} (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{m} + 2\cdot (-1)^k \cdot 4^k \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k} \\
&\quad = (-4)^k \cdot (\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 1}} \binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{-\frac{1}{2}}{m} + 2\cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k}) \\
&\quad = (-4)^k \cdot \sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}} \binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{-\frac{1}{2}}{m} \\
&\quad = (-4)^k \cdot \binom{-1}{k} = 4^k \ .
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel rechnet man explizit nach, daß

$$(l^2 - l) \circ (\mathrm{id}_M + 4h) + h = 0 \ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
g^2 - g &= (f + l(\mathrm{id}_M - 2f))^2 - (f + l(\mathrm{id}_M - 2f)) \\
&= f^2 + l(2f - 4f^2) + l^2(\mathrm{id}_M - 4f + 4f^2) - f - l(\mathrm{id}_M - 2f) \\
&= f^2 - f - l(\mathrm{id}_M - 4f + 4f^2) + l^2(\mathrm{id}_M - 4f + 4f^2) \\
&= h + (l^2 - l)(\mathrm{id}_M + 4(f^2 - f)) = h + (l^2 - l)(\mathrm{id}_M + 4h) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Also ist g idempotent. Es bleibt die Beobachtung, daß überhaupt jedes idempotente Element $g \in F_0 \operatorname{End}_R(M)$ strikt ist. Für $x = g(y) \in F_nM$ haben wir n!amlich $x = g^2(y) = g(x) \in g(F_nM)$. $\square$

Satz 12.9. *Sei* Π *ein graduierter* $\mathrm{gr}(R)$*-Modul, welcher projektiv ist; weiter gelte:*

(a) $F_\bullet R$ *ist ausschöpfend und diskret, und* $\Pi_n = 0$ *für alle* $n << 0$

oder

(b) $F_\bullet R$ *ist ausschöpfend und vollständig, und* Π *ist endlich-erzeugt.*

Dann existiert ein filt-projektiver R*-Modul* P *mit* $\mathrm{gr}(P) \cong \Pi$ *und*

$F_\bullet P$ *ist ausschöpfend und diskret im Falle (a) bzw.*

$F_\bullet P$ *ist ausschöpfend und vollständig, und* P *ist endlich-erzeugt im Falle (b).*

Außerdem existiert zu jedem filtrierten R*-Modul* M *und zu jedem* $\mathrm{gr}(R)$*-Modulhomomorphismus*

$$\bar{\gamma} : \Pi \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \quad \textit{vom Grade } p$$

ein R*-Modulhomomorphismus*

$$\gamma : P \longrightarrow M \quad \textit{vom Grade} \leq p \textit{ mit } \mathrm{gr}(\gamma) = \bar{\gamma}.$$

Beweis. Wir fixieren homogene Erzeugende $\bar{x}_i \in \Pi_{n_i}$ für $i \in I$ und erhalten so einen surjektiven Homomorphismus von graduierten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln

$$\begin{aligned} \Lambda := \oplus_{i\in I} \mathrm{gr}(R)(-n_i) &\xrightarrow{\alpha} \Pi \\ (\bar{a}_i)_i &\longmapsto \sum_i \bar{a}_i \bar{x}_i \ . \end{aligned}$$

Da Π als projektiv vorausgesetzt ist, existiert wegen Lemma 11.1 ein Homomorphismus von graduierten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln

$$\beta : \Pi \longrightarrow \Lambda \quad \text{mit } \alpha \circ \beta = \mathrm{id}_\Pi \ .$$

Wir definieren $h := \beta \circ \alpha : \Lambda \longrightarrow \Lambda$. Es gilt $h^2 = h$ und $\mathrm{im}(h) \cong \Pi$. Außerdem ist

$$L := \oplus_{i\in I} R(-n_i) \quad \text{filt-frei mit } \mathrm{gr}(L) = \Lambda \ .$$

Nach Lemma 12.1.ii existiert ein $f \in F_0 \operatorname{End}_R(L)$ mit $\mathrm{gr}(f) = h$.

An dieser Stelle halten wir fest, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können:

Im Falle (a): Die Menge $\{n_i\}_{i\in I}$ ist nach unten beschränkt. Dann gilt $\Lambda_n = 0$ für $n << 0$, und $F_\bullet L$ ist diskret (und ausschöpfend).

Im Falle (b): I ist endlich. Dann ist $F_\bullet L$ vollständig (und ausschöpfend), und L ist endlich-erzeugt.

Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 12.8 erfüllt, und wir finden ein idempotentes und striktes $g \in F_0 \operatorname{End}_R(L)$ mit $\mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(f) = h$. Wir definieren

$$P := \mathrm{im}(g) \quad \text{als filtrierten Untermodul von } L \ .$$

Insbesondere ist $F_\bullet P$ ausschöpfend und im Falle (a) auch diskret. Da g strikt ist mit $g^2 = g$, gilt

$$\begin{aligned} L &= \ker(g) \oplus \mathrm{im}(g) \\ &= \ker(g) \oplus P \end{aligned}$$

im Sinne von filtrierten R-Moduln. Im Falle (b) ist insbesondere $F_\bullet P$ vollständig und P endlich-erzeugt. Wegen Lemma 12.7 ist P filt-projektiv. Und wegen Satz 11.2.i impliziert die Striktheit von g, daß

$$\mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}(\mathrm{im}(g)) = \mathrm{im}(\mathrm{gr}(g)) = \mathrm{im}(h) \cong \Pi \ .$$

Schließlich sei ein $\bar{\gamma} : \Pi \longrightarrow \mathrm{gr}(M)$ vom Grade p gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathrm{gr}(L) = \mathrm{gr}(\ker(g)) \oplus \mathrm{gr}(P) \cong \mathrm{gr}(\ker(g)) \oplus \Pi \xrightarrow{0+\bar{\gamma}} \mathrm{gr}(M) \ .$$

Nach Lemma 12.1.ii existiert ein $\tilde{\gamma} : L \longrightarrow M$ vom Grade $\leq p$ mit $\mathrm{gr}(\tilde{\gamma}) = 0 + \bar{\gamma}$. Dann erfüllt $\gamma := \tilde{\gamma}|P$ die Behauptung. □

Satz 12.10. *Sei M ein filtrierter R-Modul, und seien $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret; dann gilt*

$$\mathrm{pd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) \ .$$

Beweis. Nach Lemma 12.2 existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R-Moduln

$$\ldots \longrightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ ,$$

so daß alle P^q filt-frei und alle $F_\bullet P^q$ diskret sind. Wegen Satz 11.2.i ist dann auch die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^q) \xrightarrow{\mathrm{gr}(\delta^q)} \ldots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^0) \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \longrightarrow 0$$

exakt, und alle $\mathrm{gr}(P^q)$ sind frei und damit projektiv. Sei $d := \mathrm{pd}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$. Da sonst nichts zu beweisen ist, können wir $d < \infty$ annehmen. Auf Grund von Satz 7.1 ist $\Pi := \ker(\mathrm{gr}(\delta^{-d+1}))$ ein projektiver graduierter $\mathrm{gr}(R)$-Modul. Die Filtrierung $F_\bullet P^{-d+1}$ ist diskret. Also gilt $\mathrm{gr}_n(P^{-d+1}) = 0$ und damit $\Pi_n = 0$ für $n << 0$. Nach Satz 12.9(a) existiert dann ein filt-projektiver R-Modul P mit ausschöpfender und diskreter Filtrierung $F_\bullet P$ sowie ein Homomorphismus von filtrierten R-Moduln $\gamma : P \longrightarrow \ker(\delta^{-d+1})$ mit

$$\mathrm{gr}(\gamma) : \mathrm{gr}(P) \cong \Pi = \ker(\mathrm{gr}(\delta^{-d+1})) = \mathrm{gr}(\ker(\delta^{-d+1})) \ .$$

Wegen Cor. 11.3 ist γ bijektiv. Also erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P^{-d+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von R-Moduln, wobei P und P^q filt-projektiv und alle Filtrierungen ausschöpfend sind. Nach Lemma 12.7 ist dies ist eine projektive Auflösung von M. Aus Satz 7.1 folgt schließlich $\mathrm{pd}_R(M) \leq d$. □

Corollar 12.11. *Ist $F_\bullet R$ ausschöpfend und diskret, so gilt*

$$\mathit{l.gldim}(R) \leq \ \mathit{l.gldim}(\mathrm{gr}(R)) \ .$$

Beweis. Sei M ein beliebiger R-Linksmodul M. Wir machen M zu einem filtrierten R-Modul durch

$$F_n M := \text{ die von } F_n R \cdot M \text{ erzeugte abelsche Untergruppe.}$$

Ersichtlich ist $F_\bullet M$ diskret und wegen $F_0 M \supseteq F_0 R \cdot M \supseteq 1 \cdot M = M$ auch ausschöpfend. Satz 12.10 impliziert dann

$$\mathrm{pd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_{gr(R)}(\mathrm{gr}(M)) \leq \ \mathrm{l.gldim}(\mathrm{gr}(R)) \ .$$

□

Die Ungleichung im obigen Corollar ist eine sehr grobe Abschätzung. Zum Beispiel für die Weyl-Algebren $A_r(k)$ besagt sie

$$\text{l.gldim}(A_r(k)) \leq \text{ l.gldim}(k[x_1, \ldots, x_r, \partial_1, \ldots, \partial_r]) = 2r \ .$$

Es gilt aber in der Tat

$$\text{l.gldim}(A_r(k)) = r$$

(vgl. [Bjo] Thm. 2.3.15 (und Prop. 2.2.5)).

Satz 12.12. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $gr(R)$ linksnoethersch; weiter sei M ein filtrierter R-Modul mit ausschöpfender und separierter Filtrierung $F_\bullet M$ und endlich-erzeugtem* $\text{gr}(M)$*; dann gilt*

$$\text{pd}_R(M) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) \ .$$

Beweis. Dies ist analog zu Beweis von Satz 12.10 unter Benutzung von Satz 12.4 und Satz 12.9(b). □

Corollar 12.13. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und* $\text{gr}(R)$ *linksnoethersch; dann ist R linksnoethersch mit*

$$\textit{l.gldim}(R) \leq \textit{ l.gldim}(\text{gr}(R)) \ .$$

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Wir betrachten zunächst einen beliebigen endlich-erzeugten R-Modul M. dann existiert ein surjektiver R-Modulhomomorphismus $\alpha : R^m \twoheadrightarrow M$. Wir fassen M auf als filtrierten R-Modul mittels $F_n M := \alpha(F_n R^m)$. Mit $F_\bullet R$ ist dann auch $F_\bullet M$ ausschöpfend. Den Beweis, daß $F_\bullet M$ separiert ist, geben wir später in Satz 14.4. Da α per Konstruktion strikt ist, ist nach Satz 11.2.i auch die Abbildung $\text{gr}(\alpha) : \text{gr}(R)^m \twoheadrightarrow \text{gr}(M)$ surjektiv und $\text{gr}(M)$ somit endlich-erzeugt. Aus Satz 12.12 folgt dann

$$\text{pd}_R(M) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) \leq \text{ l.gldim}(\text{gr}(R)) \ .$$

Es gilt aber

$$\text{l.gldim}(R) = \sup\{\text{pd}_R(M) : M \text{ endlich-erzeugt}\} \leq \text{ l.gldim}(\text{gr}(R))$$

(vgl. [McL] Cor. VII 1.5). □

Corollar 12.14. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und* $\text{gr}(R)$ *linksnoethersch und linksregulär; dann ist R linksnoethersch und linksregulär.*

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal betrachtet als filtrierter Untermodul. Insbesondere ist $F_\bullet I$ ausschöpfend und separiert. Auf Grund von Satz 11.2.i ist also $\text{gr}(I)$ ein Linksideal in $\text{gr}(R)$. Da $\text{gr}(R)$ linksnoethersch und linksregulär ist, ist $\text{gr}(I)$ endlich-erzeugt mit $\text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(I)) < \infty$. Aus Satz 12.12 folgt dann $\text{pd}_R(I) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(I)) < \infty$. □

13 Gute Filtrierungen

Sei R ein filtrierter Ring mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet R$.

Definition. *Sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R-Modul; die Filtrierung $F_\bullet M$ heißt gut, wenn ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_r$ von M und $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}$ existiert mit*

$$F_n M = \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i} R \cdot x_i \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Beachte:

1) $F_\bullet M$ ist gut genau dann, wenn ein strikter surjektiver Homormorphismus von filtrierten R-Moduln

$$R(-p_1) \oplus \ldots \oplus R(-p_r) \twoheadrightarrow M$$

existiert.

2) Gute Filtrierungen sind ausschöpfend.

3) Ist $F_\bullet M$ gut, $L \subseteq M$ R-Untermodul und $N := M/L$ als filtrierter R-Modul, so ist $F_\bullet N$ ist ebenfalls gut. (Warnung: $F_\bullet L := L \cap F_\bullet M$ ist im Allgemeinen **nicht** gut.)

4) Sei M ein endlich-erzeugter R-Modul mit Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_r$, und seien $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch $F_n M := \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i$ eine gute Filtrierung auf M definiert.

Lemma 13.1. *Seien $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ gute Filtrierungen des endlich-erzeugten R-Moduls M; dann existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit*

$$F_{n-c} M \subseteq F'_n M \subseteq F_{n+c} M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Beweis. Sei

$$F_n M = F_{n-p_1} R \cdot x_1 + \ldots + F_{n-p_r} R \cdot x_r \ ,$$
$$F'_n M = F_{n-q_1} R \cdot y_1 + \ldots + F_{n-q_s} R \cdot y_s \ .$$

Wir wählen $N, N' \in \mathbb{N}$ mit

$$x_1, \ldots, x_r \in F'_N M \quad \text{und} \quad y_1, \ldots, y_s \in F_{N'} M \ .$$

Setze $N'' := \max\{|p_1|, \ldots, |p_r|, |q_1|, \ldots, |q_s|\}$ und $c := N + N' + N''$. Dann

$$\begin{aligned} F'_n M &\subseteq F_{n+|q_1|} R \cdot F_{N'} M + \ldots + F_{n+|q_s|} R \cdot F_{N'} M \\ &\subseteq F_{n+N''} R \cdot F_{N'} M \subseteq F_{n+c} M \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{n-c} M &\subseteq F_{n-c+|p_1|} R \cdot F'_N M + \ldots + F_{n-c+|p_r|} R \cdot F'_N M \\ &\subseteq F'_{n-c+N+N''} M = F'_{n-N'} M \subseteq F'_n M \ . \end{aligned}$$

$\square$

Der graduierte Ring

$$\tilde{R} := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n R \qquad \text{als abelsche Gruppe}$$

mit der Multiplikation

$$(a_n)_n \cdot (b_m)_m := \big(\sum_{n+m=k} a_n b_m \big)_k$$

heißt der *Rees-Ring* zu $F_\bullet R$. Für jeden filtrierten R-Modul M heißt der graduierte $\tilde{R}$-Modul

$$\tilde{M} := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n M \qquad \text{als abelsche Gruppe}$$

mit der Skalarmultiplikation

$$(a_n)_n \cdot (y_m)_m := \big(\sum_{n+m=k} a_n y_m \big)_k$$

der *Rees-Modul* zu $F_\bullet M$.

Für $f \in F_0 \operatorname{Hom}_R(M, N)$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \qquad \tilde{M} &\longrightarrow \tilde{N} \\ (y_n)_n &\longmapsto (f(y_n))_n \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von graduierten $\tilde{R}$-Moduln. Also ist

$$\begin{aligned} \text{filtrierte } R\text{-Moduln} &\longrightarrow \text{ graduierte } \tilde{R}\text{-Moduln} \\ M &\longmapsto \tilde{M} \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

ein Funktor.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \tilde{R} &\longrightarrow \operatorname{gr}(R) \\ (a_n)_n &\longmapsto (a_n + F_{n-1}R)_n \end{aligned}$$

ein surjektiver Homomorphismus von graduierten Ringen. Was ist der Kern?

Notation. Für $y \in F_m M$ bezeichne $[y]_m \in \tilde{M}$ das durch

$$\ldots + 0 + y + 0 + \ldots \in \ldots \oplus F_{m-1}M \oplus F_m M \oplus F_{m+1} \oplus \ldots$$

gegebenen Element. Wir setzen

$$X := [1]_1 \in \tilde{R}\ .$$

Beachte:

1) X liegt im Zentrum von $\tilde{R}$ und ist kein Nullteiler.

2) Für $y \in F_m M$ gilt $X \cdot [y]_m = [y]_{m+1}$, also $[y]_{m+1} - [y]_m \in (X-1)\tilde{M}$. Wenn $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, ist folglich

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \\ y &\longmapsto [y]_m + (X-1)\tilde{M} \ , \text{ falls } y \in F_m M \end{aligned}$$

eine wohldefinierte additive Abbildung. Für $M = R$ ist diese Abbildung ein Ringhomomorphismus.

3) Die Abbildung

$$\tilde{M} \xrightarrow{X\cdot} \tilde{M}$$

ist stets injektiv, denn $X \cdot (y_n)_n = (y_{n-1})_n$.

Satz 13.2. *Sei M ein filtrierter R-Modul; dann gilt:*

i. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{M}/X\tilde{M} &\xrightarrow{\cong} \operatorname{gr}(M) \\ (y_n)_n + X\tilde{M} &\longmapsto (y_n + F_{n-1}M)_n \end{aligned}$$

ist bijektiv;

ii. ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist $M \xrightarrow{\cong} \tilde{M}/(X-1)\tilde{M}$ ein Isomorphismus.

Insbesondere hat man die Ringisomorphismen

$$\tilde{R}/X\tilde{R} \cong \operatorname{gr}(R) \qquad \textit{und} \qquad R \cong \tilde{R}/(X-1)\tilde{R} \ .$$

Beweis. i. Wegen $X \cdot (y_n)_n = (y_{n-1})_n$ ist die Abbildung wohldefiniert. Offensichtlich ist sie surjektiv. Seien also $(y_n)_n$ und $(y'_n)_n \in \tilde{M}$ mit $z_{n-1} := y_n - y'_n \in F_{n-1}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$(y_n)_n - (y'_n)_n = (y_n - y'_n)_n = (z_{n-1})_n = X \cdot (z_n)_n \in X\tilde{M} \ .$$

ii. Es wurde schon begründet, daß die Abbildung wohldefiniert ist. *Injektivität:* Seien $z \in F_m M$ und $z' \in F_l M$ mit $m \leq l$ und $[z]_m - [z']_l = (X-1)(y_n)_n$. Das bedeutet

$$(y_{n-1} - y_n)_n = (\ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } m}}{z}, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } l}}{-z'}, 0, \ldots) \ .$$

Es folgt $z = y_{m-1} - y_m$, $z' = y_l - y_{l-1}$ und $y_n = y_{n-1}$ für alle $n \neq m, l$. Aber $y_n = 0$ für $n << 0$ und $n >> 0$ und somit $y_{m-1} = y_l = 0$. Wir erhalten schließlich $z = -y_m = -y_{m+1} = \ldots = -y_{l-1} = z'$. *Surjektivität:* $(y_n)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [y_n]_n$. ◻

Satz 13.3. *Sei M ein filtrierter R-Modul; dann gilt:*

i. Ist M endlich-erzeugt mit guter Filtrierung $F_\bullet M$, so ist $\tilde{M}$ endlich-erzeugt als $\tilde{R}$-Modul und $\operatorname{gr}(M)$ ist endlich-erzeugt als $\operatorname{gr}(R)$-Modul;

ii. ist $\tilde{M}$ endlich-erzeugt als $\tilde{R}$-Modul und ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist M endlich-erzeugt und $F_\bullet M$ ist gut.

Beweis. i. Seien $x_1, \ldots, x_r$ Erzeugende von M und $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}$ mit

$$F_n M = \sum_i F_{n-p_i} R \cdot x_i$$

Dann gilt $x_i \in F_{p_i} M$ und

$$\tilde{M} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i} \ .$$

Aus Satz 13.2.i folgt also, daß

$$\mathrm{gr}(M) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{gr}(R) \cdot (x_i + F_{p_i - 1} M) \ .$$

ii. Sei $\tilde{M}$ endlich-erzeugt. Wegen $(y_n)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [y_n]_n$ in $\tilde{M}$ finden wir endlich viele Erzeugende der Form

$$[x_1]_{p_1}, \ldots, [x_r]_{p_r} \qquad \text{mit } x_i \in F_{p_i} M \ .$$

Also $\tilde{M} = \sum_i \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i}$ und

$$F_n M = \tilde{M}_n = \sum_i \tilde{R}_{n-p_i} \cdot [x_i]_{p_i} = \sum_i F_{n-p_i} R \cdot x_i \ .$$

Ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so folgt $M = \sum_{i=1}^{r} R x_i$. □

Corollar 13.4. *Sei $\tilde{R}$ linksnoethersch; weiter sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R-Modul und $N \subseteq M$ ein filtrierter Untermodul; dann gilt:*

$$F_\bullet M \text{ gut} \Longrightarrow F_\bullet N \text{ gut.}$$

Beweis. Nach Satz 13.3.i ist $\tilde{M}$ endlich-erzeugt als $\tilde{R}$-Modul. Da $\tilde{R}$ linksnoethersch ist, muß der Untermodul $\tilde{N} \subseteq \tilde{M}$ ebenfalls endlich-erzeugt sein. Mit $F_\bullet M$ ist auch $F_\bullet N$ ausschöpfend. Also ist $F_\bullet N$ gut nach Satz 13.3.ii. □

Beachte: (Satz 13.2) $\tilde{R}$ linksnoethersch $\Longrightarrow$ R und $\mathrm{gr}(R)$ sind linksnoethersch.

Lemma 13.5. *Sei $F_\bullet R$ vollständig; weiter sei M ein filtrierter R-Modul mit ausschöpfender und separierter Filtrierung $F_\bullet M$; dann ist M endlich-erzeugt mit guter Filtrierung $F_\bullet M$ genau dann, wenn $\mathrm{gr}(M)$ endlich-erzeugt ist als $\mathrm{gr}(R)$-Modul.*

Beweis. Die direkte Implikation folgt aus Satz 13.3.i. Für die Rückimplikation benutze man die Existenz einer strikten Surjektion

$$R(-p_1) \oplus \ldots \oplus R(-p_r) \twoheadrightarrow M$$

nach 12.3. □

Das *graduierte Jacobson-Radikal* von $\tilde{R}$ ist definiert als

$$\mathrm{Jac}^{\mathrm{gr}}(\tilde{R}) := \text{Durchschnitt aller maximalen echten graduierten Linksideale von } \tilde{R} .$$

Mit vollständig analogem Beweis gilt dann das "graduierte Nakayama-Lemma":

Sei L endlich-erzeugter graduierter $\tilde{R}$-Modul; aus $\mathrm{Jac}^{\mathrm{gr}}(\tilde{R})L = L$ folgt $L = 0$.

Satz 13.6. *Sei $\tilde{R}$ linksnoethersch und gelte $F_{-1}R \subseteq \mathrm{Jac}(F_0R)$; ist für einen filtrierten R-Modul M der Rees-Modul $\tilde{M}$ ein endlich-erzeugter $\tilde{R}$-Modul, so ist $F_\bullet M$ separiert.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$L := \cap_{m\in\mathbb{N}} X^m\tilde{M} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\big(\cap_{m\in\mathbb{N}} F_mM\big) = 0$$

gilt. Auf Grund der Voraussetzungen an $\tilde{R}$ und $\tilde{M}$ ist L ein endlich-erzeugter $\tilde{R}$-Modul. Außerdem gilt $XL = L$. Die Behauptung folgt deswegen aus dem graduierten Nakayama-Lemma, sobald wir gezeigt haben, daß $X \in \mathrm{Jac}^{\mathrm{gr}}(\tilde{R})$. Sei dazu $\mathfrak{m} \subseteq \tilde{R}$ ein beliebiges maximales graduiertes Linksideal. Aus $1 \notin \mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \tilde{R}_0 \neq \tilde{R}_0$. Dann existiert ein maximales Linksideal $\mathfrak{n} \subseteq \tilde{R}_0$ mit $\mathfrak{m}_0 \subseteq \mathfrak{n}$. Aus der Voraussetzung, daß $F_{-1}R \subseteq \mathrm{Jac}(F_0R)$, ergibt sich andererseits

$$X\tilde{R} \cap \tilde{R}_0 \subseteq \mathrm{Jac}(\tilde{R}_0) .$$

Wir erhalten

$$(\mathfrak{m} + X\tilde{R})_0 = \mathfrak{m}_0 + (X\tilde{R})_0 \subseteq \mathfrak{n} + \mathrm{Jac}(\tilde{R}_0) \subseteq \mathfrak{n}$$

und damit $\mathfrak{m} + X\tilde{R} \neq \tilde{R}$. Aus der Maximalität von $\mathfrak{m}$ folgt dann aber $X\tilde{R} \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ beliebig war, beweist dies, daß $X\tilde{R} \subseteq \mathrm{Jac}^{\mathrm{gr}}(\tilde{R})$. □

Corollar 13.7. *Sei $\tilde{R}$ linksnoethersch und gelte $F_{-1}R \subseteq \mathrm{Jac}(F_0R)$; weiter sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R-Modul mit guter Filtrierung $F_\bullet M$; dann gilt:*

i. Für jeden Untermodul $N \subseteq M$ ist $N = \cap_{n\in\mathbb{Z}}(N + F_nM)$;

ii. $F_\bullet M$ ist separiert;

iii. für filtrierte Untermoduln $L \subseteq N \subseteq M$ gilt: $\mathrm{gr}(L) = \mathrm{gr}(N) \Longrightarrow L = N$.

Beweis. Nach Satz 13.3.i ist $\tilde{M}$ endlich-erzeugt als $\tilde{R}$-Modul. Aus Satz 13.6 folgt dann, daß $F_\bullet M$ separiert ist. Wenden wir dies an auf den filtrierten Faktormodul M/N, so ergibt sich

$$0 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_n(M/N) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (F_nM + N)/N ,$$

was nichts anderes als die Behauptung i. ist. Schließlich gelte $\mathrm{gr}(L) = \mathrm{gr}(N)$. Sei $x \in N$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $x \in F_mN$. Nach Annahme gilt $\mathrm{gr}_m(L) = \mathrm{gr}_m(N)$ und damit $x \in L + F_{m-1}N$. Induktiv folgt so $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} L + F_nN \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} L + F_nM$. Wegen i. heißt das $x \in L$, also $N \subseteq L$ und damit $L = N$. □

Bemerkung 13.8. *ist $F_\bullet R$ vollständig, so gilt $F_{-1}R \subseteq \mathrm{Jac}(F_0R)$.*

Beweis. Sei $x \in F_{-1}R$. Dann ist $x^n \in F_{-n}R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Vollständigkeit von $F_\bullet R$ ist $y := 1 + x + x^2 + \ldots \in R$ wohldefiniert mit $y(1-x) = 1$. Da $F_{-1}R$ ein Ideal in F_0R ist, gilt $-ax \in F_{-1}R$ für alle $a \in F_0R$ und folglich $1 + (F_0R)x \subseteq (F_0R)^\times$. Letzteres impliziert aber $x \in \mathrm{Jac}(F_0R)$. □

14 Die Artin-Rees-Eigenschaft

Weiterhin sei R ein filtrierter Ring mit ausschöpfender $F_\bullet R$.

Definition. *Sei M ein filtrierter R-Modul; die Filtrierung $F_\bullet M$ heißt Artin-Rees, falls zu jedem endlich-erzeugten R-Untermodul $N \subseteq M$ eine gute Filtrierung $G_\bullet N$ auf N und ein $c \in \mathbb{N}$ existieren mit*

$$N \cap F_nM \subseteq G_{n+c}N \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Lemma 14.1. *Sei M ein filtrierter R-Modul, und sei die Filtrierung $F_\bullet M$ ausschöpfend und Artin-Rees; dann existiert zu jedem endlich-erzeugten Untermodul $N \subseteq M$ und zu jeder guten Filtrierung $G_\bullet N$ auf N ein $c \in \mathbb{N}$ mit*

$$G_{n-c}N \subseteq N \cap F_nM \subseteq G_{n+c}N \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Beweis. Seien zunächst $G_\bullet N$ und $c \in \mathbb{N}$ gegeben wie in der Definition verlangt. Gelte etwa

$$G_nN = \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i}R \cdot y_i \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

mit geeigneten Erzeugenden $y_i \in N$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, existiert ein $a \in \mathbb{N}$ mit $y_1, \ldots, y_r \in F_aM$. Wir setzen $b := \max(|p_1|, \ldots, |p_r|)$. Dann gilt

$$G_nN \subseteq F_{n+a+b}M \quad \text{bzw.} \quad G_{n-(a+b)}N \subseteq N \cap F_nM .$$

Für $d := \max(a+b, c)$ ergibt sich also

$$G_{n-d}N \subseteq N \cap F_nM \subseteq G_{n+d}N .$$

Daraus folgt die Behauptung für eine beliebige gute Filtrierung auf N mit Hilfe von Lemma 13.1. □

Lemma 14.2. *Sei $(N, G_\bullet N) \subseteq (M, F_\bullet M)$ eine Inklusion von filtrierten R-Moduln, wobei $G_\bullet N$ ausschöpfend sei; für die Rees-Moduln $\tilde{N}^G$ und $\tilde{N}^F$ zu den Filtrierungen $G_\bullet N$ und $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M$ gilt dann:*

i. $\tilde{N}^G \subseteq \tilde{N}^F$ ist $\tilde{R}$-Untermodul;

ii. zu jedem $a \in \tilde{N}^F$ existiert ein $k \geq 1$, so daß $X^k a \in \tilde{N}^G$;

iii. $G_\bullet N = F_\bullet N$ *genau dann, wenn die Abbildung* $\tilde{M}/\tilde{N}^G \xrightarrow{X\cdot} \tilde{M}/\tilde{N}^G$ *injektiv ist.*

Beweis. i. Dies ist klar wegen $G_n N \subseteq F_n N$.

ii. Es genügt, Elemente a der Form $a = [y]_m$ mit $y \in F_m N$ zu betrachten. Da $G_\bullet N$ ausschöpfend ist, existiert ein $l > m$ mit $y \in G_l N$. Dann ist

$$X^{l-m} \cdot [y]_m = [y]_l \in \tilde{N}^G \ .$$

iii. Zunächst gelte $G_\bullet N = F_\bullet N$. Wir betrachten M/N als filtrierten R-Modul bezüglich der Quotientenfiltrierung $F_n(M/N) = F_n M + N/N$. Dann ist

$$0 \longrightarrow \tilde{N}^G = \tilde{N}^F \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \widetilde{M/N} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\tilde{R}$-Moduln. Folglich erhalten wir $\tilde{M}/\tilde{N}^G \cong \widetilde{M/N}$. Auf dem Rees-Modul $\widetilde{M/N}$ ist die Multiplikation mit X aber injektiv, wie wir schon festgehalten haben.

Umgekehrt sei jetzt die waagrechte Abbildung in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{M}/\tilde{N}^G \arrow[r, "X\cdot"] & \tilde{M}/\tilde{N}^G \\ \tilde{N}^F/\tilde{N}^G \arrow[u, hook] \arrow[ur, "X\cdot"'] & \end{tikzcd}$$

injektiv. Wegen ii. ist aber die schräge Abbildung nur injektiv, wenn $\tilde{N}^F/\tilde{N}^G = 0$, also $F_\bullet N = G_\bullet N$ gilt. □

Satz 14.3. *Für einen filtrierten R-Modul M mit ausschöpfender Filtrierung* $F_\bullet M$ *sind äquivalent:*

i. $\tilde{M}$ *ist noethersch;*

ii. M *und* $\mathrm{gr}(M)$ *sind noethersch, und* $F_\bullet M$ *ist Artin-Rees.*

Beweis. i. $\Longrightarrow$ ii. Wegen Satz 13.2 sind M und $\mathrm{gr}(M)$ sind noethersch. Nach Satz 13.3.ii ist die Filtrierung $F_\bullet M$ gut. Sei nun $N \subseteq M$ ein (endlich-erzeugter) R-Untermodul. Im Beweis von Cor. 13.4 haben wir gesehen, daß dann auch die Filtrierung $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M$ gut ist. Also ist $F_\bullet M$ Artin-Rees.

ii. $\Longrightarrow$ i. *Schritt 1:* Sei $\mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$ ein *graduierter* $\tilde{R}$-Untermodul. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ endlich-erzeugt ist. Dazu definieren wir einen R-Untermodul $N \subseteq M$ durch

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"] & \tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \arrow[d, "\cong"] \\ N \arrow[r, "\subseteq"] & M \end{tikzcd}$$

und setzen

$$G_nN := \text{ Bild von } \mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M} \text{ in } N\ .$$

Hierzu ist zu beachten:

* Für $a \in \mathcal{N}_n$ gilt $Xa = a + (X-1)a$, also $a = Xa - (X-1)a$. Es folgt $\mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M} \subseteq \mathcal{N}_{n+1} + (X-1)\tilde{M}$ und damit

$$G_nN \subseteq G_{n+1}N\ .$$

* Wegen $F_mR \cdot \mathcal{N}_n = \tilde{R}_m \cdot \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{N}_{n+m}$ gilt $F_mR \cdot G_nN \subseteq G_{n+m}N$. Also ist N ein filtrierter R-Modul.
* Wegen $\mathcal{N}_n \cap (X-1)\tilde{M} = 0$ ist die rechte waagrechte Abbildung in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M}_n + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \arrow[d, leftrightarrow, "y \mapsto [y]_m"', "\cong"] & \supseteq & \mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \mathcal{N}_n \arrow[l, "\cong"'] \\
F_nM & \supseteq & G_nN \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

ein Isomorphismus. Das bedeutet, daß die Inklusion $(N, G_\bullet N) \subseteq (M, F_\bullet M)$ ein Homomorphismus von filtrierten R-Moduln ist, der beim Übergang zu den Rees-Moduln die Inklusion

$$\tilde{N}^G = \mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$$

induziert.

Andererseits haben wir die Filtrierung $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M (\supseteq G_\bullet N)$ auf N. Als Untermoduln noetherscher Moduln sind $N \subseteq M$ und $\mathrm{gr}^F(N) \subseteq \mathrm{gr}(M)$ endlicherzeugt über R bzw. $\mathrm{gr}(R)$. Wir wählen endlich viele homogene Erzeugende $\bar{x}_i = x_i + F_{p_i-1}N \in \mathrm{gr}^F_{p_i}(N)$ (für $i = 1, \ldots, r$) für $\mathrm{gr}(N)$. Durch Hinzufügen geeigneter weiterer Elemente können wir annehmen, daß die $x_1, \ldots, x_r$ den R-Modul N erzeugen.

Wir behaupten nun, daß die Filtrierung $F_\bullet N$ gut ist. Es gilt

$$\mathrm{gr}^F_n(N) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{gr}_{n-p_i}(R)\bar{x}_i$$

und damit

$$F_nN \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i}R \cdot x_i + F_kN \Big) \tag{7}$$

Andererseits ist wegen $N = \sum_{i=1}^{r} Rx_i$ jedenfalls die Filtrierung

$$F'_nN := \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i}R \cdot x_i$$

auf N gut. Per Konstruktion gilt

$$F'_n N \subseteq F_n N \ .$$

Da $F_\bullet M$ als Artin-Rees vorausgesetzt ist, finden wir nach Lemma 14.1 ein $c \in \mathbb{N}$ mit

$$F_n N = N \cap F_n M \subseteq F'_{n+c} N \quad \text{und damit} \quad F_{n-c} N \subseteq F'_n N = \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i} R \cdot x_i$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zusammen mit (7) erhalten wir

$$F_n N \subseteq \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i} R \cdot x_i + F_{n-c} = \sum_{i=1}^{r} F_{n-p_i} R \cdot x_i = F'_n N$$

Somit ist $F_\bullet N = F'_\bullet N$ gut.

Es folgt (vgl. den Beweis von Satz 13.3), daß

$$\tilde{N}^F = \sum_{i=1}^{r} \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i}$$

endlich-erzeugt ist. Wegen $G_\bullet N \subseteq F_\bullet N$ und Lemma 14.2 ist $\tilde{N}^G = \mathcal{N} \subseteq \tilde{N}^F$ ein $\tilde{R}$-Untermodul, und es existiert ein $k >> 0$ mit $X^k \tilde{N}^F \subseteq \mathcal{N}$. Folglich ist

$$\mathcal{N}/X^k \tilde{N}^F \subseteq \tilde{N}^F / X^k \tilde{N}^F$$

ein $\tilde{R}$-Untermodul. Andererseits ist $\tilde{M}/\tilde{N}^F \xrightarrow{X^k \cdot} \tilde{M}/\tilde{N}^F$ injektiv wegen Lemma 14.2.iii. Somit ist die von der Inklusion $\tilde{N}^F \subseteq \tilde{M}$ induzierte Abbildung

$$\tilde{N}^F / X^k \tilde{N}^F \longrightarrow \tilde{M}/X^k \tilde{M}$$

injektiv. Beides zusammen impliziert, daß $\mathcal{N}/X^k \tilde{N}^F$ isomorph ist zu einem Untermodul von $\tilde{M}/X^k\tilde{M}$. Wir betrachten nun die exakte Sequenz von $\tilde{R}$-Moduln

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^{k-1}\tilde{M}/X^k\tilde{M} \arrow[r, "\subseteq"] & \tilde{M}/X^k\tilde{M} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & \tilde{M}/X^{k-1}\tilde{M} \arrow[r] & 0 \\ & \tilde{M}/X\tilde{M} \cong \mathrm{gr}(M). \arrow[u, "X^{k-1}", "\cong"'] & & & \end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{gr}(M)$ noethersch ist, folgt induktiv, daß auch $\tilde{M}/X^k\tilde{M}$ noethersch ist. Somit ist $\mathcal{N}/X^k\tilde{N}^F$ als Untermodul endlich-erzeugt. Aber $X^k\tilde{N}^F \cong \tilde{N}^F$ ist ebenfalls endlich-erzeugt. Folglich ist $\mathcal{N}$ endlich-erzeugt.

2. Schritt: Wir zeigen, daß $\tilde{M}_m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ ein noetherscher $\tilde{R}_0$-Modul ist. Dazu sei $L \subseteq \tilde{M}_m$ ein $\tilde{R}_0$-Untermodul. Der von L in $\tilde{M}$ erzeugte $\tilde{R}$-Untermodul $\mathcal{N} := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{R}_{n-m} \cdot L$ ist ein graduierter $\tilde{R}$-Untermodul von $\tilde{M}$ und ist somit nach dem 1. Schritt endlich-erzeugt. Per Konstruktion können entsprechende Erzeugende in L gewonnen werden, also

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{R} z_i \qquad \text{mit } z_1, \ldots, z_s \in L \ .$$

Insbesondere folgt

$$L \subseteq \mathcal{N}_m = \sum_{i=1}^{s} \tilde{R}_0 z_i \subseteq L \ .$$

Also ist $L = \sum_{i=1}^{s} \tilde{R}_0 z_i$ endlich-erzeugt.

3. Schritt: Wir betrachten den graduierten Modul $\tilde{M}^+ := \oplus_{n\geq 0} \tilde{M}_n$ über dem graduierten Ring $\tilde{R}^+ := \oplus_{n\geq 0} \tilde{R}_n$. Sei $\mathcal{L} \subseteq \tilde{M}^+$ ein graduierter $\tilde{R}^+$-Untermodul. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{L}$ endlich-erzeugt ist. Sei $\mathcal{N}$ der von $\mathcal{L}$ in $\tilde{M}$ erzeugte $\tilde{R}$-Untermodul. Dies ist wiederum ein graduierter Untermodul, der deshalb nach dem 1. Schritt von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird, etwa

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{R} y_i \qquad \text{mit } y_i \in \mathcal{L}_{p_i} \subseteq \mathcal{N}_{p_i}.$$

(insbesondere $p_i \geq 0$). Dann gilt

$$\mathcal{N}_n = \sum_{i=1}^{r} \tilde{R}_{n-p_i} \cdot y_i \ .$$

Mit $p := \max(p_1, \ldots, p_r)$ erhalten wir

$$\oplus_{n\geq p} \mathcal{L}_n \subseteq \sum_{i=1}^{r} \tilde{R}^+ \cdot y_i \ .$$

Auf Grund des 2. Schrittes ist $\mathcal{L}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{p-1}$ als $\tilde{R}_0$-Untermodul von $\tilde{M}_0 \oplus \ldots \oplus \tilde{M}_{p-1}$ endlich-erzeugt etwa von $z_1, \ldots, z_s$. Dann sind $y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s$ Erzeugende von $\mathcal{L}$ als $\tilde{R}^+$-Modul.

4. Schritt: Sei $L \subseteq \tilde{M}^+$ ein beliebiger $\tilde{R}^+$-Untermodul. Wir wollen zeigen, daß L endlich-erzeugt ist. Dazu definieren wir zu L einen graduierten $\tilde{R}^+$-Untermodul $L^{\mathrm{gr}} \subseteq \tilde{M}^+$ durch

$$L_m^{\mathrm{gr}} := \{x \in \tilde{M}_m : \text{es existiert ein } y \in L \text{ mit } y - x \in \oplus_{n<m} \tilde{M}_n\} \ .$$

Nach dem 3. Schritt wird L^{gr} erzeugt von endlich vielen homogenen Elementen $x_1, \ldots, x_r$ mit $x_i \in L_{p_i}^{\mathrm{gr}}$. Wir fixieren Elemente $y_i \in L$ mit $y_i \in x_i + \oplus_{n<p_i} \tilde{M}_n$, und wir zeigen, daß $y_1, \ldots, y_r$ den $\tilde{R}^+$-Modul L erzeugen. Sei also $z \in L$ ein beliebiges Element, das wir in seine homogenen Komponenten $z = z_1 + \ldots + z_k$ mit $z_j \in \tilde{M}_{m_j}$ und $m_1 < \ldots < m_k$ zerlegen. Dann gilt $z_k \subseteq L_{m_k}^{\mathrm{gr}}$. Genauer sei

$$z_k = \sum_{\substack{i=1 \\ m_k \geq p_i}}^{r} a_i x_i \qquad \text{mit } a_i \in \tilde{R}_{m_k - p_i} \subseteq \tilde{R}^+ \ .$$

Wir setzen $z' := \sum\limits_{\substack{i=1 \\ m_k \geq p_i}}^{r} a_i y_i \in L$. Dann gilt

$$z - z' \in L \cap \oplus_{n<m_k} \tilde{M}_n \quad \text{und} \quad z \in \big(\sum_{i=1}^{r} \tilde{R}^+ y_i \big) + \big(\oplus_{n<m_k} \tilde{M}_n \big) \ .$$

Diese Argumentation wiederholend und induktiv so fortfahrend erhalten wir schließlich $z \in \sum_{i=1}^{r} \tilde{R}^+ y_i$.

5. Schritt: Sei nun $\mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$ ein beliebiger $\tilde{R}$-Untermodul. Wir definieren einen graduierten $\tilde{R}$-Untermodul $\mathcal{N}' \subseteq \tilde{M}$ durch

$$\mathcal{N}'_m := \{x \in \tilde{M}_m : \text{es existiert ein } y \in \mathcal{N} \text{ mit } y - x \in \oplus_{n>m} \tilde{M}_n\} \ .$$

Nach dem 1. Schritt wird $\mathcal{N}'$ als $\tilde{R}$-Untermodul erzeugt von endlich vielen homogenen Elementen $x_1, \ldots, x_r$ mit $x_i \in \mathcal{N}'_{p_i}$. Wir fixieren Elemente $y_i \in \mathcal{N}$ mit $y_i \in x_i + \oplus_{n>p_i} \tilde{M}_n$. Mit dem gleichen Argument wie im 4. Schritt folgt induktiv

$$\mathcal{N} \subseteq \sum_{i=1}^{r} \tilde{R} y_i + (\mathcal{N} \cap \tilde{M}^+) \ .$$

Nach dem 4. Schritt ist $\mathcal{N} \cap \tilde{M}^+$ endlich-erzeugt über $\tilde{R}^+$. Beides zusammen ergibt, daß $\mathcal{N}$ endlich-erzeugt ist. □

Satz 14.4. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig, und sei* $\mathrm{gr}(R)$ *linksnoethersch; dann gilt:*

i. R und $\tilde{R}$ sind linksnoethersch;

ii. $F_\bullet R$ ist Artin-Rees.

Für jeden endlich-erzeugten filtrierten R-Modul M mit guter Filtrierung $F_\bullet M$ gilt außerdem:

iii. $F_\bullet M$ ist separiert;

iv. für jeden filtrierten Untermodul $N \subseteq M$ ist $F_\bullet N$ gut und

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (N + F_n M) \ ;$$

v. für filtrierte Untermoduln $L \subseteq N \subseteq M$ gilt: $\mathrm{gr}(L) = \mathrm{gr}(N) \Longrightarrow L = N$.

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Sei $L \subseteq R$ ein Linksideal mit $F_\bullet L := L \cap F_\bullet R$, so daß $\mathrm{gr}(L) \subseteq \mathrm{gr}(R)$. Da $\mathrm{gr}(R)$ als linksnoethersch vorausgesetzt ist, ist $\mathrm{gr}(L)$ endlich-erzeugt. Wegen Lemma 13.5 ist dann (L endlich-erzeugt und) $F_\bullet L$ gut. Insbesondere ist $F_\bullet R$ Artin-Rees. Aus Satz 14.3 erhalten wir, daß $\tilde{R}$ linksnoethersch ist. Wegen Bem. 13.8 gilt $F_{-1} R \subseteq \mathrm{Jac}(F_0 R)$. Also folgen iii. - v. mit Hilfe der Corollare 13.4 und 13.7. □

15 Übertragung der Auslander-Regularität

Wir setzen in diesem Paragraphen $F_\bullet R$ als ausschöpfend und vollständig voraus und $\mathrm{gr}(R)$ als links- und rechtsnoethersch. Wegen Cor. 12.6 ist dann auch R links- und rechtsnoethersch.

Sei M ein endlich-erzeugter R-Modul. Wir fixieren eine *gute* Filtrierung $F_\bullet M$ auf M. Wegen Satz 14.4 ist $F_\bullet M$ automatisch separiert. Nach Satz 13.3 ist $\mathrm{gr}(M)$ ein endlich-erzeugter $\mathrm{gr}(R)$-Modul. Nach Satz 12.4 existiert eine strikt-exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \ldots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

wobei die P^q für alle $q \leq 0$ endlich-erzeugt und filt-frei sind. Dann ist auch (Satz 11.2) die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^q) \xrightarrow{\mathrm{gr}(\delta^q)} \ldots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^0) \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \longrightarrow 0$$

exakt mit endlich-erzeugten freien $\mathrm{gr}(R)$-Moduln $\mathrm{gr}(P^q)$ für alle $q \leq 0$. Wir halten fest:

* $\mathrm{Ext}^*_R(M,R)$ wird berechnet durch den Komplex

  $$\mathrm{Hom}_R(P^0,R) \xrightarrow{d^0} \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^q,R) \xrightarrow{d^{-q}} \ldots \tag{8}$$

  mit $d^q := \mathrm{Hom}_R(\delta^{-q-1},R)$.

* $\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M),\mathrm{gr}(R))$ wird berechnet durch den Komplex

  $$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(P^0),\mathrm{gr}(R)) &\xrightarrow{\bar{d}^0} \ldots \\ \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(P^q),\mathrm{gr}(R)) &\xrightarrow{\bar{d}^{-q}} \ldots\end{aligned} \tag{9}$$

  mit $\bar{d}^q := \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(\delta^{-q-1}),\mathrm{gr}(R))$.

Auf $\mathrm{Hom}_R(P^q,R)$ hatten wir die Filtrierung

$$F_n \mathrm{Hom}_R(P^q,R) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(P^q,R) : f(F_n P^q) \subseteq F_{n+m}R \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

definiert. Dadurch wird $\mathrm{Hom}_R(P^q,R)$ zu einem filtrierten R-Rechtsmodul und (8) zu einem Komplex von filtrierten Moduln. Außerdem erhalten wir induzierte Filtrierungen

$$\begin{aligned}F_n \mathrm{Ext}^p_R(M,R) &= F_m(\ker(d^p)/\operatorname{im}(d^{p-1})) \\ &= \big(\ker(d^p) \cap F_m \mathrm{Hom}_R(P^{-p},R) + \operatorname{im}(d^{p-1})\big)/\operatorname{im}(d^{p-1})\ .\end{aligned}$$

Behauptung 1:

i. $F_\bullet \mathrm{Hom}_R(P^q,R)$ ist gut;

ii. $F_\bullet \operatorname{Ext}^p_R(M,R)$ ist gut.

Beweis. i. Aus $P^q \cong R(n_1) \oplus \ldots \oplus R(n_r)$ folgt

$$\operatorname{Hom}_R(P^q, R) \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{Hom}_R(R(n_i), R) = \oplus_i \operatorname{Hom}_R(R,R)(-n_i) \quad = \oplus_i R(-n_i)\ .$$

ii. Dies folgt aus Satz 14.4.iv mit i. und der Tatsache, daß Quotientenfiltrierungen von guten Filtrierungen wieder gut sind. □

Behauptung 2: $\operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^q), \operatorname{gr}(R))$ ist mittels

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^q), \operatorname{gr}(R))_m := \{\bar f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^q), \operatorname{gr}(R)) : \bar f \text{ hat Grad } m\}$$

ein graduierter $\operatorname{gr}(R)$-Rechtsmodul, und (9) ist ein Komplex von graduierten Moduln. Insbesondere sind damit auch die

$$\operatorname{Ext}^p_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(M), \operatorname{gr}(R)) = \ker(\bar d^p) / \operatorname{im}(\bar d^{p-1})$$

graduierte Moduln.

Behauptung 3: Wir haben

$$\operatorname{gr}_\bullet \operatorname{Hom}_R(P^q, R) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^q), \operatorname{gr}(R))$$

als graduierte $\operatorname{gr}(R)$-Rechtsmoduln.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} F_m \operatorname{Hom}_R(P^q, R) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^q), \operatorname{gr}(R)) \\ f &\longmapsto \operatorname{gr}(f) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert mit Kern $F_{m-1} \operatorname{Hom}_R(P^q, R)$. Nach Lemma 12.1.ii ist sie surjektiv. □

Wir erhalten also

$$\operatorname{gr}_\bullet (8) = (9)\ .$$

Betrachten wir die Spektralsequenz zu dem filtrierten Komplex

$${}^p \operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R) := F_{-p} \operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)\ ,$$

so folgt mit Cor. 5.2, daß

$$\begin{aligned} E_1^{pq} &= h^{p+q}(\operatorname{gr}_{-p} \operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)) \\ &= h^{p+q}(\operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(P^{-\bullet}), \operatorname{gr}(R))_{-p}) \\ &= \operatorname{Ext}^{p+q}_{\operatorname{gr}(R)}(\operatorname{gr}(M), \operatorname{gr}(R))_{-p}\ , \end{aligned}$$

gilt, und mit Satz 5.3, daß

$$\begin{aligned} E_\infty^{pq} &\cong \frac{\operatorname{im}(h^{p+q}(F_{-p}\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet},R)) \to h^{p+q}(\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet},R)))}{\operatorname{im}(h^{p+q}(F_{-p-1}\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet},R)) \to h^{p+q}(\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet},R)))} \\ &= \operatorname{gr}_{-p}\operatorname{Ext}_R^{p+q}(M,R)\ . \end{aligned}$$

Die Filtrierung auf (8) ist im Allgemeinen nicht regulär, weswegen die Diskussion in §5 nicht ausreicht. Allgemein hatte man

$$\tag{10} \begin{tikzcd} E_r^{pq} = Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \arrow[d, two heads] \\ Z_r^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \\ Z_r^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \arrow[u, two heads] \\ E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}\ .$$

Behauptung 4: Für jedes $k \geq 0$ existiert ein $r(k) \geq 1$, so daß für alle $r \geq r(k)$ und $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

a. $Z_\infty^{p,k-p} + F_{-p-1}\operatorname{Hom}_R(P^{-k},R) = Z_r^{p,k-p} + F_{-p-1}\operatorname{Hom}_R(P^{-k},R)$,

b. $B_\infty^{p,k-p} = B_r^{p,k-p}$,

c. $Z_r^{p,k-p} = Z_\infty^{p,k-p} + Z_{r-1}^{p+1,k-p-1}$.

Beweis. a. Wir setzen $L^k := \operatorname{Hom}_R(P^{-k},R)$. Nach Behauptung 1 sind $F_\bullet L^k$ und $F_\bullet L^{k+1}$ gut. Damit sind auch die Filtrierungen $d^k(F_\bullet L^k)$ und (nach Satz 14.4.iv) $F_\bullet L^{k+1} \cap \operatorname{im}(d^k)$ auf $\operatorname{im}(d^k)$ gut. Wegen Lemma 13.1 existiert dann ein $c \geq 1$ mit

$$F_n L^{k+1} \cap d^k(L^k) \subseteq d^k(F_{n+c}L^k) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Sei nun $x \in Z_{c+1}^{p,k-p} = (d^k)^{-1}(F_{-p-c-1}L^{k+1}) \cap F_{-p}L^k$. Dann gilt

$$d^k(x) \in F_{-p-c-1}L^{k+1} \cap d^k(F_{-p}L^k) \subseteq d^k(F_{-p-1}L^k)\ .$$

Also $d^k(x) = d^k(y)$ für ein $y \in F_{-p-1}L^k$. Wir erhalten $d^k(x-y) = 0$ und $x - y \in F_{-p}L^k$ und somit $x - y \in Z_\infty^{p,k-p}$. Es folgt

$$x \in Z_\infty^{p,k-p} + F_{-p-1}L^k\ .$$

b. Ganz analog wie eben haben wir ein $d \geq 1$ mit

$$F_n L^k \cap d^{k-1}(L^{k-1}) \subseteq d^{k-1}(F_{n+d}L^{k-1}) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Dann gilt

$$B_\infty^{p,k-p} = d^{k-1}(L^{k-1}) \cap F_{-p}L^k \subseteq d^{k-1}(F_{-p+d}L^{k-1}) \cap F_{-p}L^k = B_d^{p,k-p} \ .$$

Deswegen nehmen wir $r(k) := \max(c+1, d)$.

c. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Umgekehrt sei also $x \in Z_r^{p,k-p}$. Aus a. folgt $x = z + y$ mit $z \in Z_\infty^{p,k-p}$ und $y \in F_{-p-1}L^k$. Also erhalten wir $y = x - z \in Z_r^{p,k-p} \cap F_{-p-1}L^k = Z_{r-1}^{p+1,k-p-1}$. □

Durch Einsetzen in (10) erhalten wir Folgendes.

Behauptung 5: $E_r^{p,k-p} \cong E_\infty^{p,k-p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ und $r \geq r(k)$.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_p \operatorname{Ext}_R^k(M,R) \cong E_\infty^{-p,k+p} \cong E_{r(k)}^{-p,k+p} &= \text{ Subquotient von } E_1^{-p,k+p} \\ &= \text{ Subquotient von } \operatorname{Ext}^k_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))_p \ . \end{aligned}$$

Behauptung 6: $j_R(M) \geq j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$.

Beweis. Sei $k < j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$. Aus Behauptung 5 folgt $\mathrm{gr}_\bullet \operatorname{Ext}_R^k(M,R) = 0$. Nach Behauptung 1 ist die Filtrierung auf $\operatorname{Ext}_R^k(M,R)$ gut und damit ausschöpfend und separiert (Satz 14.4.iii). Also folgt $\operatorname{Ext}_R^k(M,R) = 0$. □

Satz 15.1. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig; dann gilt: Ist* $\mathrm{gr}(R)$ *links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär, so ist auch R links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär. In diesem Falle hat man*

$$j_R(M) = j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$$

für jeden endlich-erzeugten R-Modul M mit guter Filtrierung $F_\bullet M$.

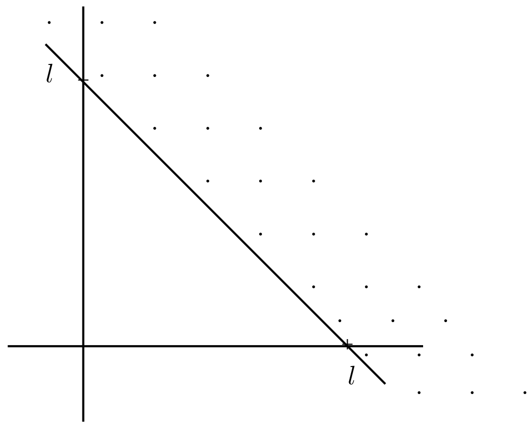
Beweis. Nach Cor. 12.14 ist R links- und rechtsnoethersch und links- und rechtsregulär. Sei M ein endlich-erzeugter R-Modul (links oder rechts), und sei $N \subseteq \operatorname{Ext}_R^k(M,R)$ ein Untermodul. Wir haben zu zeigen, daß $j(N) \geq k$ gilt. Dazu fixieren wir eine gute Filtrierung auf M. Mit Hilfe von Behauptung 1 erhalten wir eine gute Filtrierung auf $\operatorname{Ext}_R^k(M,R)$ und damit (Satz 14.4.iv) auf N. Nach Behauptung 6 gilt $j(N) \geq j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N))$. Aber $\mathrm{gr}(N) \subseteq \mathrm{gr}_\bullet \operatorname{Ext}_R^k(M,R)$, und Letzteres ist wegen Behauptung 5 isomorph zu einem Subquotienten von $\operatorname{Ext}^k_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))$. Mit Lemma 10.13.i folgt also

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N)) \geq j_{\mathrm{gr}(R)}(\operatorname{Ext}^k_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R)) \geq k \ .$$

Für den Zusatz bleibt wegen Behauptung 6 noch

$$j_R(M) \leq j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$$

zu zeigen. Wir können $M \neq 0$ und damit auch $\mathrm{gr}(M) \neq 0$ annehmen. Sei $l := j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) < \infty$. Dann gilt $E_1^{pq} = 0$ für $p + q < l$.



Wir erhalten exakte Sequenzen von endlich-erzeugten $\mathrm{gr}(R)$-Moduln

$$0 \longrightarrow \oplus_{p+q=l} E_{r+1}^{pq} \xrightarrow{\subseteq} \oplus_{p+q=l} E_r^{pq} \overset{d^r}{\twoheadrightarrow} S_r \subseteq \oplus_{p+q=l} E_r^{p+r,q-r+1} \ .$$

Außerdem ist S_r ein Subquotient von $\oplus_{p+q=l} E_1^{p+r,q-r+1} = \mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l+1}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))$. Wegen Lemma 10.13.i bzw. ii gilt dann

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(S_r) \geq j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l+1}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))) \geq l + 1$$

bzw.

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\oplus_{p+q=l} E_r^{pq}) = \min(j_{\mathrm{gr}(R)}(\oplus_{p+q=l} E_{r+1}^{pq}), j_{\mathrm{gr}(R)}(S_r)) \ .$$

Nach Satz 10.9 gilt zudem

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\oplus_{p+q=l} E_1^{pq}) = j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))) = l \ .$$

Diese Tatsachen kombinierend folgt induktiv

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\oplus_{p+q=l} E_r^{pq}) = l \qquad \text{für alle } r \geq 1 \ .$$

Mit Behauptung 5 erhalten wir

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^l(M, R)) = j_{\mathrm{gr}(R)}(\oplus_{p+q=l} E_\infty^{pq}) = l < \infty \ .$$

Insbesondere ist $\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^l(M, R) \neq 0$, also $\mathrm{Ext}_R^l(M, R) \neq 0$ und folglich $j(M) \leq l$. $\square$

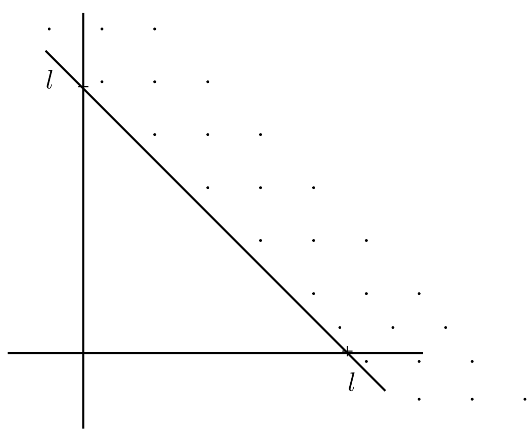
Lemma 15.2. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig, und sei $\mathrm{gr}(R)$ links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär; dann gilt:*

i. *Auf jedem endlich-erzeugten reinen R-Modul M existiert eine gute Filtrierung* $F_\bullet M$*, so daß* $\mathrm{gr}^F(M)$ *ebenfalls rein ist;*

ii. *sei M ein endlich-erzeugter R-Modul mit vorgegebener guter Filtrierung* $F_\bullet M$*; ist* $\mathrm{gr}^F(M)$ *rein, so ist auch M rein.*

Beweis. i. Sei M rein von der Stufe $l := j_R(M)$. Wir setzen $N := \mathrm{Ext}^l_R(M, R)$ und fixieren eine gute Filtrierung auf N. Nach Satz 10.9 ist N rein von der Stufe l. Dabei gilt $l = j_R(N) = j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N))$ wegen Satz 15.1. Wieder nach Satz 10.9 ist $\mathrm{Ext}^l_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N), \mathrm{gr}(R))$ rein von der Stufe l. Mit Hilfe von Satz 10.12 und Satz 10.14.iii erhalten wir, daß jeder Untermodul $\neq 0$ von $\mathrm{Ext}^l_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N), \mathrm{gr}(R))$ rein von der Stufe l ist.

Wir betrachten nun das Analogon für N der obigen Spektralsequenz. Nach Behauptung 1.ii existiert eine gute Filtrierung $F_\bullet \mathrm{Ext}^l_R(N, R)$. Nach Satz 9.4 ist M ein Untermodul von $\mathrm{Ext}^l_R(N, R)$. Also ist $\mathrm{gr}(M)$ bezüglich der induzierten guten Filtrierung ein Untermodul von $\mathrm{gr}\,\mathrm{Ext}^l_R(N, R)$. Aber aus Behauptung 5 und der Gestalt der Spektralsequenz



folgt, daß $\mathrm{gr}\,\mathrm{Ext}^l_R(N, R) = \oplus_{p+q=l} E^{pq}_\infty = \oplus_{p+q=l} E^{pq}_{r(l)}$ ein $\mathrm{gr}(R)$-Untermodul von $\oplus_{p+q=l} E^{pq}_1 = \mathrm{Ext}^l_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(N), \mathrm{gr}(R))$ ist. Also können wir das eingangs Gezeigte auf $\mathrm{gr}(M)$ anwenden und erhalten, daß $\mathrm{gr}(M)$ rein ist von der Stufe l.

ii. Nach Satz 15.1 gilt $l := j_R(M) = j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$. Aus der Reinheit von $\mathrm{gr}(M)$ folgt

$$\mathrm{Ext}^{l+s}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{Ext}^{l+s}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R)), \mathrm{gr}(R)) = 0 \qquad \text{für alle } s \geq 1 \; .$$

Zusammen mit der Gorenstein-Bedingung ergibt sich

$$j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{Ext}^{l+s}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M), \mathrm{gr}(R))) \geq l + s + 1 \; .$$

Da $\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R)$ nach Beh. 5 ein Subquotient von $\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l+s}(\mathrm{gr}(M),\mathrm{gr}(R))$ ist, erhalten wir mit Lemma 10.13.i also $j_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}\,\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R)) \geq l+s+1$ und damit

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l+s}(\mathrm{gr}(\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R)),\mathrm{gr}(R)) = 0 \ .$$

Aus dem gleichen Grunde ist $\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^{l+s}(\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R),R)$ ein Subquotient von $\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr}(R)}^{l+s}(\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R),\mathrm{gr}(R))$. Es folgt

$$\mathrm{gr}_\bullet \mathrm{Ext}_R^{l+s}(\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R),R) = 0 \ .$$

Nun ist aber die Filtrierung auf $\mathrm{Ext}_R^{l+s}(\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R),R)$ gut und damit ausschöpfend und separiert. Also erhalten wir schließlich

$$\mathrm{Ext}_R^{l+s}(\mathrm{Ext}_R^{l+s}(M,R),R) = 0 \qquad \text{für alle } s \geq 1 \ .$$

Dies zeigt, daß M rein ist von der Stufe l. $\square$

Literatur

[Bas] Bass H.: *Algebraic K-Theory*. New York: Benjamin 1968

[Bjo] Björk J.-E.: *Rings of Differential Operators*. Amsterdam: North-Holland 1979

[BH] Bruns W., Herzog J.: *Cohen-Macaulay rings*. Cambnridge Univ. Press 1993

[CE] Cartan H., Eilenberg S.: *Homological algebra*. Princeton Univ. Press 1956

[Eis] Eisenbud D.: *Commutative Algebra*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1995

[God] Godement R.: *Théorie des faisceaux*. Paris: Hermann 1964

[McL] MacLane S.: *Homology*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1975