Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Donnerstag, 24.05.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 7

Aufgabe 1. Thema: Orthonormalbasen, Fourier-Reihen und -Koeffizienten. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $C_{per}(\mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, welche 2π-periodisch sind: $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen bzw. wiederholen Sie:

(a) Wird $C_{per}(\mathbb{K})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)g(x) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \overline{f(x)}g(x) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

versehen, so ist $\{\sin(kx), \cos(k'x)\}_{k,k'\in\mathbb{Z}}$ bzw. $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein *Orthonormalsystem*, d.h. diese Funktionen haben die Norm 1 und sind paarweise orthogonal.

(b) Die *Fourier-Reihe* $S(f)$ einer solchen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ist der Limes (für $n \to \infty$, falls er existiert) der *Fourier-Polynome*

$$S_n(f)(x) = \begin{cases} \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx} & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Hierbei sind die *Fourier-Koeffizienten* von f gegeben durch

$$a_k = \langle\cos(kx), f\rangle, \quad b_k = \langle\sin(kx), f\rangle \quad \text{bzw.} \quad c_k = \langle e^{ikx}, f\rangle\ .$$

Aufgabe 2. Sei $D_n := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ bzw. $F_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j$ der sogenannte *Dirichlet-* bzw. *Fejér-Kern* aus $C_{per}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Diese haben für $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ die folgende Darstellung:

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \quad \text{bzw.} \quad F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2 .$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $F_n \geq 0$ und $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ F_n(x) = 1$.

(c) Zu jedem $\epsilon > 0$ und $0 < r < \pi$ gibt es ein N mit

$$\int_{[-\pi,\pi]\backslash[-r,r]} dx\ F_n(x) \leq \frac{2\pi}{n \cdot \sin^2(\frac{r}{2})} < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Hinweis: Benutzen Sie in (a) für D_n die geometrische Summe und bestimmen Sie hiermit dann $n \cdot \sin^2(\frac{x}{2}) \cdot F_n(x)$ mittels der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen. Für (c) benutze man die explizite Beschreibung von F_n aus (a).

Aufgabe 3. Für zwei Funktionen $f, g \in C_{per}(\mathbb{K})$ definiert man ihre *Faltung* $f * g \in C_{per}(\mathbb{K})$ als

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) \cdot g(x-t)\,.$$

Zeigen Sie für $f \in C_{per}(\mathbb{K})$:

(a) Für das n-te Fourier-Polynom von f gilt $S_n(f) = f * D_n$, mit F_n, D_n wie in Aufgabe 2. Entsprechend wird $\sigma_n(f) := f * F_n$ als das n-te *Fejér-Polynom* von f bezeichnet.

(b) $\sigma_n(f)$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen f.
Hinweis: Sie dürfen die Resultate von Aufgabe 2 (b-c) benutzen.

(c) Falls die Fourier-Reihe $S(f)$ von f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt

$$S(f)(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie: konvergiert die Folge komplexer Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ gegen eine Zahl s, so konvergiert auch die Folge der arithmetischen Mittel $a_n = \frac{1}{n}(s_0 + \cdots + s_{n-1})$ gegen s.

Aufgabe 4. Sei $f \in C_{per}(\mathbb{R})$ die periodische Fortsetzung von $|x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$. Zeigen Sie:

(a) Für die Fourier-Koeffizienten von f gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$a_k = \begin{cases} \pi & \text{für } k = 0, \\ \frac{-2}{\pi k^2}(1-(-1)^k) & \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(b) Die Fourier-Reihe $S(f)(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

(c) Folgern Sie mittels Aufgabe 3(c): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Briefkästen: Mo: 8.00-10.00 den Bk. 157, Do. 12.00-14.00 den Bk. 158 .
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen drei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: Sa. den 07.07.2007, 15.30-18.00.