Die folgende Übersicht ist eine Zusammenstellung der Inhalte der Vorlesung. In der Prüfung wird nicht verlangt, Beweise für die namentlich erwähnten Sätze zu geben. Die Prüfungskandidat(inn)en können individuell eines der Themengebiete 1-4 angeben, über das sie nicht geprüft werden möchten.

0 Grundbegriffe

- Mengen, Teilmengen, Äquivalenzrelationen, Abbildungen, injektiv/bijektiv/surjektiv, Bild und Urbild, Komposition
- natürliche Zahlen, vollständige Induktion, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen

1 Analysis I

1. Folgen
   Grenzwert, Konvergenz, Beschränktheit, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Bolzano-Weierstraß, unendliche Reihen, Konvergenzkriterien, absolute Konvergenz
2. Abbildungen und Funktionen
   Teilmengen reeller Zahlen, offene und abgeschlossene Intervalle, Schranken, Supremum und Infimum, Graph von Funktionen, Zusammensetzungen von Funktionen, Umkehrfunktion, Stetigkeit, Zwischenwertsatz, stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen, gleichmäßige Stetigkeit, Konvergenz von Funktionenfolgen
3. Elementare Funktionen
   Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmus, Trigonometrische Funktionen
4. Differentiation
   Differenzierbarkeit, Ableitung, Produktregel, Kettenregel, Differentiation elementarer Funktionen, höhere Ableitungen, lokale Extrema, Mittelwertsatz
5. Integralrechnung
   Treppenfunktionen, Integral von Treppenfunktionen, Regelfunktionen, Integral von Regelfunktionen, Mittelwertsatz, Stammfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Substitutionsregel, Partialbruchzerlegung, partielle Integration, uneigentliche Integrale, Integrale von Funktionenfolgen
6. Taylor-Formel
   Konvergenzradius von Potenzreihen, Taylor-Reihe, Taylor-Formel

2 Lineare Algebra

1. Grundlagen
   Gruppen, Ringe, Körper K, Vektorräume, Standardvektorraum K^n, Matrizen $M(m \times n, K)$, Untervektorräume
2. Vektorräume
   Linearkombination, linear (un)abhängig, Erzeugendensystem, Basis, Austauschsatz, Dimension, Summen und direkte Summen von Vektorräumen
3. Lineare Abbildungen
   Definition, Homo-/Iso-/Endomorphismen, Einschränkung auf Untervektorräume, Definition und Eigenschaften von Bild und Kern, Rang, Matrizen und Beziehung zu linearen Abbildungen, Multiplikation, Transposition, inverse Matrix
4. Lineare Gleichungssysteme
   homogen, inhomogen, Lösungsraum, Beziehung zum Rang, Zeilenstufenform, Gaußsches Eliminationsverfahren, erweiterte Koeffizientenmatrix, elementare Zeilenumformungen, Lösungsraum aus Blockdarstellung der erweiterten Koeffizientenmatrix, Elementarmatrizen, Berechnung der inversen Matrix
5. Determinanten
   Definition und Eigenschaften der Determinante, Entwicklungssatz, komplementäre Matrix, Cramersche Regel, Determinante von Endomorphismen
6. Eigenwerte
   Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenraum, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynmom, Nullstellen und Linearfaktoren, Bestimmung des Eigenraums, Diagonalisierbarkiet und Dimension der Eigenräume
7. Euklidische und unitäre Vektorräume
   Skalarprodukt, Norm, Metrik (Abstand), Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Bilinearformen und Sesquilinearformen, positive Definitheit, Orthonormalbasis, Orthonormalisierungssatz, orthonormale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen und Matrizen, Diagonalisierung selbstadjungierter Matrizen

3 Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

1. Topologie metrischer Räume
   Metrik, offene und abgeschlossene Teilmengen, Grenzwerte und Konvergenz in metrischen Räumen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit, Stetigkeit, Kompaktheit

2. Differenzierbarkeit
   Tangentialvektoren an Kurven, partielle Ableitungen, Satz von Schwarz, Vektorfelder, Gradient/Divergenz/Laplace, (totale) Differenzierbarkeit, Richtungsableitung, Taylor-Formel, Hessesche Matrix und lokale Extrema, Banachscher Fixpunktsatz, Satz über implizite Funktionen, lokale Umkehrfunktion, Untermannigfaltigkeiten, Extrema mit Nebenbedingungen, Euler-Lagrange-Gleichungen

3. Integralrechnung
   Treppenfunktionen, Hüllreihe, L^1-Halbnorm, Lebesgue-Integral, Satz von Fubini und von Tonelli, Meßbarkeit, Nullmengen, Modifikationssatz, Satz von Riesz-Fischer, Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi), Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue), Transformationssatz, Integration durch Polarkoordinaten und Jacobi-Abbildung, Oberflächenintegrale, Gaußscher Integralsatz

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen und Hilbert-Räume

1. Differentialgleichungen 1. Ordnung
   Lösung bei getrennten Variablen, lineare DGL, Variation der Konstanten, exakte DGL, Stammfunktion, System von DGL 1. Ordnung, Satz von Picard-Lindelöf, Lipschitz-Bedingung

2. Lineare Differentialgleichungen
   Lösungsfundamentalsystem, Variation der Konstanten, Wronski-Determinante, Lösungsansätze bei konstanten Koeffizienten

3. Hilbert-Räume
   Definition, Beispiele $L^2(\Omega)$ und $\ell^2(\mathbb{N})$, Lot und orthogonale Projektoren, Rieszscher Darstellungssatz, Summierbarkeit, Orthonormalsystem, Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung, Orthonormalbasen, Fourier-Reihe, Fourier-Integral, adjungierter Operator, selbstadjungierte Operatoren, Eigenwerte/Eigenvektoren/Eigenräume

4. Anwendungen
   Sturmsche Randwertaufgaben, Greensche Funktion, Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben, Eigenschaften der Eigenwerte, schwache Formulierung des Dirichlet-Problems