1. Der Raum der Schwartz Funktionen und temperierte Distributionen

1.1. **Schwartz Funktionen.** Wir führen folgende Notationen ein. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$| \alpha | = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Definition 1.1. Der Raum der Schwartz Funktionen $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller glatten Funktionen φ auf $\mathbb{R}^n$, so dass

$$\| \varphi \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} | x^\alpha D^\beta \varphi(x) | < \infty$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Funktionen in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sind solche, die mit ihren Ableitungen schneller abfallen als die Inversen jeder Polynomfunktion.

Theorem 1.1. *Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig bezüglich der Topologie, die vom Halbnormensystems $\| \cdot \|_{\alpha,\beta}$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, induziert wird, also ein Fréchetraum.*

Im folgenden betrachten wir den Fall $n = 1$. Wir definieren die linearen Abbildungen $A : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ and $A^\dagger : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$$

und $N = A^\dagger A$. Weiterhin sei

$$\phi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\phi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{A}^\dagger)^n \phi_0 = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Man bezeichnet ϕ_n als das n-te Hermitsche Polynom.

Theorem 1.2. *$\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ ist eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $L^2(\mathbb{R})$ bezgl. der L^2-Norm. Es gilt ferner*

- $A\phi_0 = 0$
- $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \phi_n = (2n + 1)\phi_n$ *für alle* $n \geq 0$

Das N-Darstellungstheorem für $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sagt im wesentlichen aus, dass $\{\phi_n\}_n$ auch eine Basis von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Es sei $s_n \subset \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}^n\}$ die Menge aller Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^n} | a_k || k |^m < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, mit $| a_k | = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{k_i}^2}$ für $a_k = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})$. Wir definieren auf s_n eine Topologie mit Hilfe der Halbnormen

$$\| a_k \|_\beta = (k + 1)^\beta \mid a_k \mid$$

mit $\beta \in \mathbb{N}^n$ und $(k + 1)^\beta = \prod_{i=1}^k (k_i + 1)^{\beta_i}$ für $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Ferner definieren wir

$$\phi_k(x) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{k_i}(x_i)$$

Theorem 1.3. *Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Folge*

$$a_k = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi_k(x)} f(x)\, dx^n \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}^n$$

in s_n, die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\to s_n \\ f &\mapsto (a_k)_{k \in \mathbb{N}^n} \end{aligned}$$

ist ein topologischer Isomorphismus und die Reihe $\sum_k a_k \phi_k$ konvergiert in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen f.

Korollar 1.4. *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist separabel bezgl. der von den Halbnormen $\| \cdot \|_{\alpha,\beta}$ induzierten Fréchet-Topologie.*

1.2. **Temperierte Distributionen.**

Definition 1.2. Der (topologische) Dualraum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ des $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nennt man den Raum der temperierten Distributionen.

Beispiel 1.1. Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Da $\| f \|_\infty < \infty$ ist $gf \in L^1$. Damit wird durch

$$g(f) = \int g(x) f(x)\, dx^n$$

eine lineare Abbildung definiert, die wegen $| g(f) | \leq \| g \|_{L^1} \| f \|_{0,0}$ stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Dieses Beispiel motiviert die folgende formale Schreibweise. Sei $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dann schreiben wir

$$T(f) = \int T(x) f(x)\, dx^n$$

Delta-distribution: Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren $\delta_b(f) = f(b)$. Aufgrund von $| \delta(b)(f) | \leq \| f \|_{0,0}$ ist $\delta_b \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1.3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ verschwindet auf Ω, falls $T(f) = 0$ für jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit supp $f \subset \Omega$ gilt. Der Träger supp T einer Distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist das Komplement der größten offenen Menge auf der T verschwindet.

Für ein $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ lässt sich die *Schwache Ableitung* $D^\alpha T$ definieren durch

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f)$$

und in formaler Schreibweise motivieren, vermittels partieller Integration,

$$\int (D^\alpha T)(x) f(x)\, dx^n = (-1)^{|\alpha|} \int T(x) \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} f \right)(x)\, dx^n$$

Wir betrachten das verschränkte Produkt der additiven, abelschen Gruppe $\mathbb{R}^n$ und sei $G \leq GL_n(\mathbb{R}^n)$ eine Untergruppe der linearen Bijektionen des $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{G} = \mathbb{R}^n \ltimes G$$

Die Gruppenoperationen sind definiert durch:

$(a, R)(b, S) = (a{+}Rb, RS), \quad (a, R)^{-1} = (-R^{-1}a, R^{-1}) \quad$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$, $R, S \in G$

Durch

$$(a, R)x = Rx + a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ (a, R) \in \mathfrak{G}$$

wird eine Gruppenwirkung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Diese wird zu einer solchen auf $S(\mathbb{R}^n)$ vermittels

$$((a, R)f)(x) = f((a, R)^{-1}x) \quad \text{für alle } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$$

erweitert. Die duale Wirkung auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sei

$((a,R)T)(f) = \mid \det R \mid T((a,R)^{-1}f)$ für alle $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $(a,R) \in \mathfrak{G}$.

Gemäß dem Beispiel 1.1 ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ erhält man vermittels Substitution

$$((a,R)g)(f) = \int \mid \det R \mid g(x) f(Rx+a)\, dx^n = \int g((a,R)^{-1}y) f(y)\, dy^n$$

womit gezeigt ist, dass die Gruppenwirkung $\mathfrak{G} \circlearrowleft \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ jene auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzt.

Auch der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ lässt sich mit einem Folgenraum identifizieren. Hierzu sei $s'_n \subset \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}^n\}$ die Menge aller Folgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ mit der Eigenschaft

$$\mid b_k \mid \leq C(k+1)^\beta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}^n$$

für ein $C > 0$ und $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Theorem 1.5. *Durch*

$$T \mapsto b_k = T(\phi_k)$$

wird eine Bijektion $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to s'_n$ definiert. Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}^n} b_k\phi_k$ konvergiert in der schwach-$*$ Topologie gegen T.

Korollar 1.6. *Der Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist schwach-$*$ dicht in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist bezüglich der schwach-$*$ Topologie separabel.*

Theorem 1.7. ***Nuklearitätstheorem*** *Sei $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C}$ eine in jeden Eintrag stetige Bilinearform. Dann gibt es genau eine temperierte Distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m}$ mit*

$$\langle f|g\rangle = T(f \otimes g) \quad \textit{für alle } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,,$$

wobei $f \otimes g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_n) g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$. Insbesondere ist $\langle\cdot|\cdot\rangle$ stetig.

2. Operatortheorie

2.1. **Unbeschränkte Operatoren.**

Definition 2.1. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D_T, D_S \subset \mathcal{H}$ lineare Teilräume von $\mathcal{H}$ und $S, T : D_S,\ D_T \to \mathcal{H}$ lineare Operatoren.

(1) S heißt eine *Erweiterung* $T \leq S$ von T, falls $D_T \subset D_S$ und $S(x) = T(x)$ für alle $x \in D_T$.
(2) T heißt *abgeschlossen*, falls der Graph $G_T = \{(\xi, T\xi) : \xi \in D_T\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ abgeschlossen in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist.
(3) T heißt *abschließbar*, falls ein Operator S existiert, der abgeschlossen ist mit $T \leq S$.
(4) T heißt *dicht definiert* falls $\overline{D_T} = \mathcal{H}$.

Man kann zeigen, dass T genau dann abschließbar ist, falls $(\xi, \eta_1), (\xi, \eta_2) \in \overline{G_T}$, so gilt $\eta_1 = \eta_2$. Das führt zu der Definition des Abschlusses von $\overline{T}$. Wir setzen $D_{\overline{T}} = P_1(\overline{G_T})$, wobei P_1 die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet, und $\overline{T}\xi = \eta_1 = \eta_2$.

Definition 2.2. (1) Ein linearer Operator $T : D_T \to \mathcal{H}$ heißt symmetrisch, falls $\langle T\xi|\eta\rangle = \langle\xi|T\eta\rangle$ für alle $\xi, \eta \in D_T$.

(2) Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator und $\overline{D_T} = \mathcal{H}$. Wir definieren $D_{T^*} = \{\eta \in \mathcal{H} : \exists!\, z \in \mathcal{H} \,\text{mit}\, \langle T\xi|\eta\rangle = \langle \xi|z\rangle\}$,

$$T^* : D_{T^*} \to \mathcal{H}$$
$$\eta \mapsto z$$

Man nennt T^* den adjungierten Operator von T.

(3) Ist $\overline{D_T} = \mathcal{H}$, so heißt T selbstadjungiert, falls $T = T^*$ (g.d.w. T symmetrisch und $D_T = D_{T^*}$).

Man kann zeigen, dass T^* immer abgeschlossen ist. Selbstadjungierte Operatoren sind damit insbesondere abgeschlossen. Es gibt aber abgeschlossene, dicht definierte, symmetrische Operatoren T, so dass T^* nicht symmetrisch ist und T keine selbstadjungierte Erweiterung zulässt.

2.2. **Spektraltheorie.**

Definition 2.3. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die starke Topologie auf dem Raum der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die durch das Halbnormensystem $\{P_\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$ mit $P_\xi T = \| T\xi \|$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Definition 2.4. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung

$$E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
$$\lambda \mapsto E_\lambda$$

(1) E_λ ist eine orthogonale Projektion für alle $\lambda \in \mathbb{R}$
(2) $\lambda \leq \mu \in \mathbb{R}$ ist $E_\lambda \leq E_\mu$ (d. h. $E_\lambda(\mathcal{H}) \subset E_\mu(\mathcal{H})$)
(3) Es gilt $\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda = 1$ und $\lim_{\lambda\to\mu,\lambda>\mu} E_\lambda = E_\mu$, in der starken Topologie.

Sei $\{E_\lambda\}_\lambda$ eine Spektralschar und $\xi \in \mathcal{H}$, dann wird durch $\lambda \mapsto \langle E_\lambda \xi|\xi\rangle$ eine oberhalbstetige, monoton wachsende, nichtnegative, beschränkte Funktion und damit ein endliches Maß $d\mu_{\langle E_\lambda \xi|\xi\rangle}$ auf $\mathbb{R}$ definiert. Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ eine beschränkte, Borel messbare Funktion. Dann wird durch

$$\sigma(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \int f\, d\mu_{\langle E_\lambda(\xi+i^k\eta)|\xi+i^k\eta\rangle} \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert. Es gibt dann genau einen Operator $T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so dass

$$\sigma(\xi, \eta) = \langle T_f \xi|\eta\rangle \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Wir schreiben für T_f auch

$$T_f = \int f(\lambda)\, d\mu_{E_\lambda}\,.$$

Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig (aber möglicherweise unbeschränkt) und $\xi \in \mathcal{H}$. Wir setzen

$$T_f \xi = \lim_{b\to\infty,\, a\to-\infty} T_{f\cdot 1_{(a,b]}}\xi\,,$$

falls dieser Limes existiert und bezeichnen mit $D_{T_f} \subset \mathcal{H}$ den Untervektorraum aller Vektoren für die das zutrifft.

Theorem 2.1. *Sei $\{E_\lambda\}_\lambda$ eine Spektralschar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

(1) *Es ist $\mathcal{D} = span\ \{T_{(a,b]}\xi : \xi \in \mathcal{H}\,, a, b \in \mathbb{R}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt $D \subset D_{T_f}$.*
(2) *$T_f : D_{T_f} \to \mathcal{H}$ ist dicht definiert, abgeschlossen und es gilt $T_f^* = T_{\overline{f}}$.*
(3) *Wenn f beschränkt ist, so gilt $T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\| T_f \| \leq \| f \|_\infty$*

Im Folgenden wollen wir zu einem vorgegebenen, selbstadjungierten Operator $T : D_T \to \mathcal{H}$ eine Spektralschar $\{E_\lambda\}_\lambda$ konstruieren, so dass

$$T = \int \lambda \, d\mu_{E_\lambda} \, .$$

Die Konstruktion bedarf der Cayleytransformierten U_T von T deren Definition folgendes Lemma benötigt.

Lemma 2.2. *Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator. Dann ist $T - \lambda 1 : D_T \to \mathcal{H}$ injektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Proof. Sei $\xi \in D_T$ mit $T\xi = \lambda\xi$, so ist

$$\lambda\langle\xi|\xi\rangle = \langle T\xi|\xi\rangle = \langle\xi|T\xi\rangle = \overline{\lambda}\langle\xi|\xi\rangle \, ,$$

also $\lambda = \overline{\lambda}$ oder $\xi = 0$. □

Definition 2.5. Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ symmetrisch, und $D_{U_T} = (T + i1)(D_T)$, $R_{U_T} = (T - \lambda 1)(D_T)$. Durch

$$\begin{aligned} U_T &: D_{U_T} \to R_{U_T} \\ U_T(T\xi + i\xi) &= T\xi - i\xi \end{aligned}$$

also $U_T = (T - i1)(T + i1)^{-1} : D_{U_T} \to R_{U_T}$ (nach obigem Lemma wohldefiniert) wird eine Isometrie definiert. U_T heißt die Cayleytransformierte von T.

Theorem 2.3. *Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ sei abgeschlossener, symmetrischer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $T = T^*$ *(insbesondere $\overline{D_T} = \mathcal{H}$)*
(2) $D_{U_T} = R_{U_T} = \mathcal{H}$ *und* $U_T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *ist unitär.*
(3) $D_T = (1 - U_T)(\mathcal{H})$ *und* $T(\eta - U_T\eta) = i(\eta + U\eta)$. *(also $T = i(1 + U_T)(1 - U_T)^{-1}$ auf D_T)*

Sei nun $T : D_T \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $U_T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die Caleytranformierte von T. $-U_T$ ist unitär. Nach dem Spektraltheorem für beschränkte Operator gibt es einen beschränkten selbstadjungierten Operator $S = -i\log(-U_T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so dass $-U_T = \exp(iS)$. Es gilt $\sigma(S) \subset [-\pi, \pi]$, wobei $\sigma(S)$ das Spektrum von S bezeichnet.
Ferner ist 1 kein Eigenwert von U_T. I. A. $U_T\eta = \eta$ für ein $\eta \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$\langle\xi|\eta - U_T\eta\rangle = \langle\xi|\eta\rangle - \langle\xi|U_T\eta\rangle = \langle U_T\xi|U_T\eta\rangle - \langle\xi|U\eta\rangle = \langle U_T\xi - \xi|U_T\eta\rangle = 0$$

für alle $\xi \in \mathcal{H}$ woraus $\eta = 0$ folgt, wegen $\overline{(1 - U_T)(\mathcal{H})} = \overline{D_T} = \mathcal{H}$. Damit sind $\pm\pi$ keine Eigenwerte von S.
Wir definieren nun die Spektralschar von S

$$\lambda \mapsto F_\lambda = 1_{(-\infty,\lambda]}(S) \, ,$$

die starkstetig in $\pm\pi$ ist, mit $F_{-\pi} = 0$ und $F_\pi = 1$. Sei nun

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\pi, \pi) &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto i\frac{1 - e^{is}}{1 + e^{is}} = -\tan\left(\frac{s}{2}\right) \end{aligned}$$

Dann wird durch

$$\lambda \mapsto E_\lambda = F_{-2\arctan(\lambda)}$$

eine Spektralschar auf $\mathbb{R}$ definiert und es gilt:

Theorem 2.4. *Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator, und U_T, S und $\{E_\lambda\}_\lambda$ wie oben, dann gilt:*

(1) $D_T = \{\xi \in \mathcal{H} : \int \lambda \, dE_\lambda \, \xi$ *existiert*$\}$

(2)
$$T\xi = \int \lambda \, dE_\lambda \, \xi \quad \textit{für alle } \xi \in D_T$$

Korollar 2.5. ***Polardarstellung*** *Sei $T : D_T \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann gibt es eine Isometrie $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und einen positiven Operator $\mid T \mid : D_T \to \mathcal{H}$ mit $T = F \mid T \mid$.*

Proof. Sei $\{E_\lambda\}_\lambda$ die Spektralschar von T. Setze
$$F = \int \mathrm{HSF}(\lambda) \, dE_\lambda$$
$$\mid T \mid = \int \mid \lambda \mid \, dE_\lambda$$
mit der Heaviside-Funktion
$$HSF(x) = \begin{cases} -1 & \text{für alle } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für alle } x > 0 \end{cases}$$
□

Definition 2.6. Eine unitäre Einparametergruppe ist ein stark stetiger Homomorphismus
$$U : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}), \; t \mapsto U_t$$
in die Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ der unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Theorem 2.6. ***Satz von Stone*** *Sei $U : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Einparametergruppe. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $T : D_T \to \mathcal{H}$ mit*
$$U_t = e^{itT} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R} \, .$$