Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 10.05.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Die *Beta-Funktion* $B(a,b)$ ist für alle Zahlen $a, b > 0$ definiert durch $B(a,b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. Zeigen Sie:

(a) Das obige Integral konvergiert auch im Fall $0 < a, b < 1$.

(b) $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$ im Fall $b > 1$.

(c) $B(a,n) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$ im Fall $b = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(d) $B(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty dy\, \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}$. (*Hinweis:* Substituieren Sie $x = \frac{y}{1+y}$.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $B(a,a) = \dfrac{1}{2^{2a-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, a\right)$ für $a > 0$ (*Hinweis:* Substitution $x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{z})$).

(b) $\displaystyle\int_0^1 dx\, x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$ für alle $p, q, m > 0$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit Hilfe der Formel $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und einer Potenzreihen-Entwicklung des Integranden die Gleichung $\displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\pi^2}{12}$.
(*Hinweis:* Die Potenzreihe des Integranden konvergiert nur auf $[0,1[$. Betrachten Sie deswegen zunächst das Integral über ein Intervall $[a,b]$ mit $0 < a < b < 1$.)

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie für alle $k, l \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} dx\, \cos(kx)\cos(lx), \qquad \int_0^{2\pi} dx\, \sin(kx)\sin(lx), \qquad \int_0^{2\pi} dx\, \sin(kx)\cos(lx).$$

(*Hinweis:* Schreiben Sie die Integranden mit Hilfe von Additionstheoremen als Summe oder Differenz von Winkelfunktionen.)

(b) Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Folge der Funktionen $F_1, F_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\cos(kx) \qquad \text{und} \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\sin(kx).$$