Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **SS 2014**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 30.4.2014 bis 12h00, in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie: $\int_0^1 dx\,\sqrt{x(1-x)} = \frac{\pi}{8}$.
Hinweis: Substitution $x = \sin^2\varphi$

(b) Beweisen Sie: $\int_0^1 dx\,\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$.
Hinweise: Substitution $x = \tan\varphi$, Verwendung von $1+\tan\varphi = \sqrt{2}\frac{\sin(\pi/4+\varphi)}{\cos\varphi}$ (warum gilt diese Gleichung?) sowie Funktionalgleichung des Logarithmus und $\pi/4+\varphi = \pi/2-\psi$

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie $\int_0^1 dx\,\frac{\arctan x}{1+x}$.

(b) Berechnen Sie $\int_a^b dx\,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}$ für $-\infty < a < b < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie Stammfunktionen zu folgenden Funktionen:

(a) $x^2 \sin x$;

(b) $\sin(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$ $(a, b \in \mathbb{R})$;

(c) $x^n(\ln x)^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$; Substitution $x = \mathrm{e}^t$).

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n(x) := \int_0^x dt\,\tan^n t$, $|x| < \pi/2$. Beweisen Sie:

(a) Es ist $D_0(x) = x$, $D_1(x) = -\ln\cos x$, $nD_{n+1}(x) = \tan^n x - nD_{n-1}(x)$, $n \geq 1$.

(b) Für $d_n := D_n(\pi/4)$ ist $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

(c) Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$d_{2m} = (-1)^m\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right),\quad d_{2m+1} = (-1)^m\left(\ln\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k}\right).$$

(d) Folgern Sie aus (b) und (c) die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$