Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **SS 2014**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 28.05.14 bis 12h00 in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

(a) $F\colon C([0,1]) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_0^1 dx\, f(x)x^2$, wobei $C([0,1])$ als Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Skalarmultiplikation und Addition aufgefaßt wird;

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - (x-y)^2$;

(c) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x + 3y - 1$;

(d) $K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y| + |x+y|$.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $b_1 = (2,3,-1)$, $b_2 = (-4,5,0)$ und $b_3 = (6,-2,2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Durch $F(b_1) = (1,0)$, $F(b_2) = (0,1)$, $F(b_3) = (1,-1)$ werde eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie $\ker(F)$.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der in 2(b) definierten linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(e_1, e_1 - e_2)$ von $\mathbb{R}^2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$.

Aufgabe 3. Bezeichne V_n den komplexen Vektorraum aller Polynome $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ vom Grad kleiner gleich n und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren Abbildungen $D, T_a\colon V_n \to V_n$ durch

$$D(P) := P' = \frac{\partial}{\partial X} P \qquad \text{und} \qquad (T_aP)(X) := P(X+a) \text{ für ein festes } a \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie für diese Abbildungen jeweils (a) den Kern, (b) das Bild, (c) die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $X^0, \ldots, X^n$.

Aufgabe 4. Es sei $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, ein System von Vektoren des K-Vektorraumes V und es gelte $\mathrm{Rang}(v_1, \ldots, v_n) = n - 1$. Es besteht dann eine nichttriviale Relation der Gestalt $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. Zeigen Sie: Gilt auch $b_1v_1 + \cdots + b_nv_n = 0$ mit $b_i \in K$, so gibt es ein $c \in K$ mit $b_i = ca_i$ für alle i.