Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **SS 2014**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 09.07.2014 bis 12h00, in den Briefkästen — Blatt 12

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob folgende Matrizen A über den jeweils angegebenen Körpern K diagonalisierbar sind. Geben Sie im Fall der Diagonalisierbarkeit eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B mit $D = BAB^{-1}$ an.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$.
Dabei ist $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ der Körper aus drei Elementen. In diesem Körper wird modulo 3 gerechnet: Bezeichnen $+_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ und $\cdot_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ die Addition bzw. die Multiplikation in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, so ist $a +_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} b := a + b \bmod 3$ und $a \cdot_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} b := ab \bmod 3$.

Aufgabe 2. Es werde vorausgesetzt, daß für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ mit $A^0 := E_n$ *normal* konvergiert, so daß die Reihe beliebig umgeordnet werden kann.

(a) Berechnen Sie $\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Hinweis:* Blatt 11.

(b) Zeigen Sie: Kommutieren zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, so auch $\exp(A)$ und $\exp(B)$, und es gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $C = A + B$. Berechnen Sie $\exp(C)$.