**Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar**
**Alexander Hock**

**SS 17**

## Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

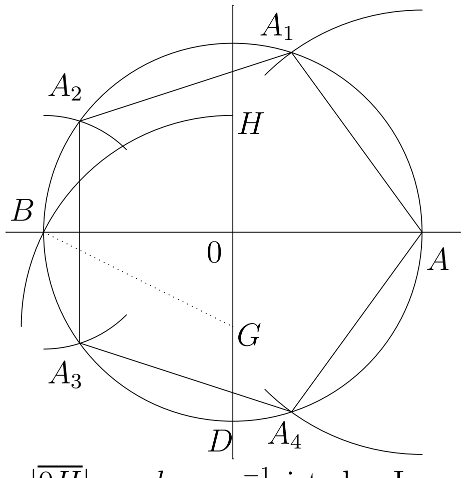
Abgabe: Dienstag, 9.5.2017 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 3

---

**Aufgabe 1.** Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal:

- Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis $S$ mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der $x$-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.
- Konstruiere das Lot $L$ auf $\overline{AB}$ durch 0 ($y$-Achse). Sei $D$ einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis $S$. Konstruiere den Mittelpunkt $G$ von $\overline{0D}$.
- Zeichne um $G$ einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb $S$ liegt, sei $H$.
- Zeichne um $B$ einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit $S$ seien $A_2$ und $A_3$.
- Zeichne um $A$ einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit $S$ seien $A_1$ und $A_4$, wobei $A_1, A_2$ auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann beweisen (a),(b),(c): $(A, A_1, A_2, A_3, A_4)$ sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.




(a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte $A_n$, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

(c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2z_3 = 1$ und $z_1z_4 = 1$.

**Aufgabe 2.** (a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) gilt

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \zeta^k\right) = (x-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \zeta^k\right) \qquad \text{mit} \qquad \zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}.$$

(b) Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}, \tag{1}$$

indem Sie $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ zum einen direkt und zum anderen über die Darstellung aus (a) berechnen.

**Aufgabe 3.** (a) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel, daß sich Umkehrfunktionen $\arcsin(z)$ und $\arccos(z)$ von sin und cos wie folgt ausdrücken lassen durch einen Zweig log des komplexen Logarithmus:

$$\arcsin(z) = -\mathrm{i} \log\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right), \qquad \arccos(z) = -\mathrm{i} \log\left(z + \mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right)$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel, daß sich eine Umkehrfunktion $\arctan(z)$ des komplexen Tangens darstellen läßt durch:

$$\arctan(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Log}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right).$$

Leiten Sie aus der Reihendarstellung $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$ des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus, für $|z| < 1$, folgende Reihendarstellung für $\arctan(z)$ her:

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |z| < 1.$$