Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 13.6.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{\partial K_2(0)} \frac{w^2(w^2-1)}{\sqrt{2}-w}\mathrm{d}w\,, \qquad \text{(b)} \quad \int_{\partial K_{3/2}(\mathrm{i})} \frac{1}{w^2+1}\mathrm{d}w$$

$$\text{(c)} \quad \int_{\partial K_{3/2}(1)} \frac{1}{w^2+1}\mathrm{d}w\,, \qquad \text{(d)} \quad \int_{\partial K_3(0)} \frac{\cos(\pi w)}{w^2-1}\mathrm{d}w$$

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) und (d) die Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial K_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\mathrm{d}w\,, \quad z \in K_r(a)$$

aus der Vorlesung folgende Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{\partial K_1(1)} \left(\frac{w}{w-1}\right)^n \mathrm{d}w\,,\ \text{wobei } n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(b)} \quad \int_{\partial K_2(0)} \frac{\exp(2\pi\mathrm{i}w)}{w^3-w^2}\mathrm{d}z$$

$$\text{(c)} \quad \int_{\partial K_{3/2}(1)} \frac{w^7+1}{w^2(w^4+1)}\mathrm{d}w.$$

Hinweis: Verwenden Sie bei (c) die Zerlegung $\frac{1}{w^2(w^4+1)} = \frac{A}{w^2} + \frac{Bw^2}{w^2-\mathrm{i}} + \frac{Cw^2}{w^2+\mathrm{i}}$. Finden Sie $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. *(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)* Sei $D \neq \varnothing$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, d.h. $z \in D \Rightarrow \bar{z} \in D$. Weiter sei

$$\begin{aligned} D_+ &= \{z \in D \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \\ D_0 &= \{z \in D \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0\} \\ D_- &= \{z \in D \,|\, \mathrm{Im}(z) < 0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion $f : D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$, die auf D_+ holomorph ist, und auf D_0 reelle Werte annimt, ist die gespiegelte Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_+ \cup D_0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } z \in D_- \end{cases}$$

holomorph auf ganz D.
Hinweis. Ein Satz aus §12 der Vorlesung führt zum Ziel.

Aufgabe 4. *(Maximumsprinzip)*
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel, um zu zeigen: Falls $|f|$ in einem Punkt $z \in U$ ein Maximum hat, dann muß f konstant sein.
Bemerkung: In der Vorlesung wird ein anderer Beweis dieser Aussage gegeben.

(b) Sei U beschränkt und f stetig auf den Rand ∂U fortsetzbar. Begründen Sie, daß f auf $\overline{U} = U \cup \partial U$ ein Maximum hat. Schlußfolgern Sie, daß $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂U annimmt, also $\sup_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$.

(c) Zeigen Sie: Ist f aus (b) in U eine nichtkonstante Funktion, aber auf dem Rand ∂U konstant, so hat f eine Nullstelle in U.