Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: *Mittwoch*, 9.5.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß für alle $k, m \in \mathbb{N}^\times$ und $c \in]0,1[$ gilt:

$$\int_0^c dx\, \frac{x^{k-1}}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{nm+k}}{nm+k}.$$

(b) Folgern Sie mit Aufgabe 4 von Blatt 3 die *Bailey-Borwein-Plouffe-Formel*

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Aufgabe 2. (a) Seien $0 \leq k < 1$ und $x, c \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Zeigen Sie, daß das Integral

$$v(x,k) := \int_0^x dt\, \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}$$

auch für $|x| = 1$ existiert und für $E(\varphi, k) := v(\sin\varphi, k)$ mit $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ gilt:

$$E(\varphi,k) = \int_0^\varphi d\psi\, \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Reihe für $\sqrt{1-y}$ mit $y = k^2 \sin^2 \phi$ und gliedweiser Integration, daß für alle $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und alle k mit $0 \leq k < 1$ gilt:

$$E(\varphi,k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} A_{2n}(\varphi) \quad \text{mit } A_{2n}(\varphi) = \int_0^\varphi dx\, \sin^{2n} x.$$

Aufgabe 3. Die *Beta-Funktion* $B(a,b)$ ist für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ definiert durch $B(a,b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. Zeigen Sie:

(a) Das obige Integral konvergiert auch im Fall $0 < a, b < 1$.

(b) $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$ im Fall $b > 1$.

(c) $B(a,n) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$ im Fall $b = n \in \mathbb{N}^\times$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 dx\, x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$ für alle $p, q, m > 0$.

Aufgabe 4. Sei $b > 0$ und sei $\gamma(a)$ für $a > 0$ definiert durch

$$\gamma(a) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} B(a, b).$$

Zeigen Sie, daß die so definierte Funktion γ die Voraussetzungen des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt, und schlußfolgern Sie die Formel $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a, b)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.)