Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 5.7.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Eigenräume folgender Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & c-1 & 0 \\ 0 & 1 & c^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{Q}$;

(c) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist rekursiv definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geq 0$. Für jedes $n \geq 0$ sei $v^{(n+1)} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie

(a) eine Matrix $A \in M(2, \mathbb{R})$, die $v^{(n+1)} = Av^{(n)} = A^n v^{(1)}$ für alle $n \geq 0$ erfüllt;
(b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A;
(c) Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ so, dass $f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt;
(d) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Aufgabe 3. Für jedes $A \in M(n, \mathbb{C})$ konvergieren die Potenzreihen

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \qquad \sin(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen $\exp(A)$, $\sin(A)$, $\exp(B)$, $\sin(B)$ für $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
(*Hinweis:* B besser nicht diagonalisieren. Denken Sie an cosh und sinh.)
(b) Berechnen Sie $\exp(C)$ für die Matrix $C = A + B$ mit Hilfe einer Diagonalisierung.
(c) Vergleichen Sie $\exp(A)$, $\exp(B)$ und $\exp(C)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4. Die *Spur* einer Matrix $A \in M(n, \mathbb{C})$ ist die Summe der Diagonaleinträge:

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \text{wobei } A = (a_{ij}).$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Spur}(BC) = \mathrm{Spur}(CB)$ für alle $B \in M(n \times m, \mathbb{C})$ und $C \in M(m \times n, \mathbb{C})$;

(b) es gibt keine Matrizen $P, Q \in M(n, \mathbb{C})$ mit $PQ - QP = E_n$;

(c) ist A diagonalisierbar, so ist $\mathrm{Spur}(A)$ die Summe der Eigenwerte von A.