Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 06/07**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 23.11.06, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Untersuchen Sie folgende Mengen X auf Offenheit und Abgeschlossenheit und bestimmen Sie ihre Ränder ∂X:

a) $X = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq \frac{1}{1+|z|} \right\} \subset \mathbb{C}$

b) $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{Q}\,,\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ |y| < |\sin \frac{1}{x}| \right\} \subset \mathbb{R}^2$

d) $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > x^2 \text{ und } y < x \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 2. Es sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf X.
Beschreiben Sie die Cauchyfolgen. Wann konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. dieser Metrik?

Aufgabe 3. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $x,y \in X$ sei $D : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$D(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

erklärt.
Zeigen Sie: (X,D) ist ein metrischer Raum.

Aufgabe 4.
a) Es sei V der Vektorraum der auf $[0,1]$ beschränkten Funktionen. Zeigen Sie:

$$\|f\| := \sup \left\{ |f(x)| \ : \ x \in [0,1] \right\}$$

ist eine Norm auf V.

b) Es sei V der Vektorraum der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen

$$\|v\| := \left(\int_0^1 |v(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} .$$

Zeigen Sie: $(V, \| \ldots \|)$ ist ein normierter Vektorraum, aber nicht vollständig.