Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 06/07

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 21.12.06 bis 17h00 in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Es sei $A = A^t \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := x^t Ax$. Zeige:

a) F besitzt auf der Einheitssphäre $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1\}$ ein Minimum λ, etwa in $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Der Vektor v aus a) ist dann Eigenvektor von A zum Eigenwert $v^t Av$.

Aufgabe 2. Sei A_0 die Hyperebene gegeben durch $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a^t x - c = 0\}$ für festes $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ und festes $c \in \mathbb{R}$.
Berechne den Abstand eines Punktes $b_0 \in \mathbb{R}^n$ von A_0.

Aufgabe 3. Es sei $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^N x_i$. Eingeschränkt auf die Teilmenge $\left\{(x_1, \ldots, x_N) \ : \ x_\nu \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq \nu \leq N \ , \ \sum_{\nu=1}^N x_\nu = 1\right\}$ besitzt F genau in $x_1 = \ldots = x_N = \frac{1}{N}$ ein absolutes Maximum. Man folgere:
Für beliebige positive $x_1, \ldots, x_N$ gilt

$$\prod_{i=1}^N x_i \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i\right)^N .$$

"=" gilt genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_N$ gilt.

Aufgabe 4. Es sei $p \in \mathbb{R}, p > 1, a \in \mathbb{R}^N$. Betrachtet werde die Funktion $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^N a_i x_i$ und die durch $f(x) = 1 - \sum_{i=1}^N |x_i|^p = 0$ gegebene Untermannigfaltigkeit M.

a) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von F auf M das absolute Maximum $\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{1/q}$ und das absolutes Minimum $-\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{1/q}$ hat, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

b) Man folgere:

$$\Big|\sum_{i=1}^N a_i x_i\Big| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N .$$