Die Renormierungsgruppe

Antrittsvorlesung — 15. November 2006

Raimar Wulkenhaar

Mathematisches Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität

Einleitung

- typische physikalische Systeme haben sehr viele Freiheitsgrade ($\sim 10^{23}$ pro cm^3 Material)
- theoretische Methoden im wesentlichen auf einen Freiheitsgrad beschränkt
- exakte Beschreibung eines typischen physikalischen Systems deshalb unmöglich

In Wirklichkeit: enorme Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade

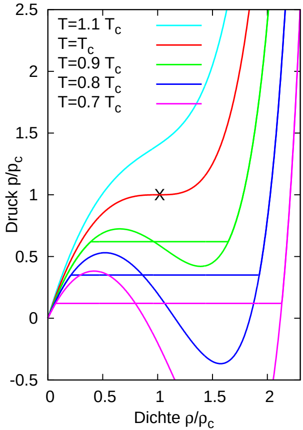
Beispiel: Zustand eines Gases im wesentlichen durch Druck p und Temperatur T bestimmt:

für ideales Gas: $\boxed{p\varrho^{-1} = cT}$ (ϱ – Dichte)

Phasenübergänge und kritische Phänomene

Zustandsgleichung für reale Gase (van der Waals)

$$(p + a\varrho^2)(\varrho^{-1} - b) = cT$$



- Dichte kann bei Druckabnahme nicht zunehmen $\rightarrow$ Maxwellsche Gerade
- Phasenübergang gasförmig-flüssig
  Dichte unstetig
- kritischer Punkt (T_c, p_c)
  Unterschied der Phasen verschwindet
  Wasser: $T_c = 374\,^\circ\mathrm{C}$, $p_c = 218\,\mathrm{atm}$, $\varrho_c = 0.3\,\mathrm{g/cm}^3$
- besondere Eigenschaften bei (T_c, p_c)
  keine natürliche Längen-Skala, fraktal

Kritischer Punkt

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{T=T_c} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \varrho^2}\right)_{T=T_c} = 0$$

van-der-Waals-Gleichung ausgedrückt durch kritische Werte:

$$\left(\frac{p}{p_c} + 3\left(\frac{\varrho}{\varrho_c}\right)^2\right)\left(\frac{\varrho_c}{\varrho} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{T}{T_c}$$

- universell
- Linearisierung in Umgebung des kritischen Punktes liefert universelle kritische Exponenten

$\rightarrow$ z.B. $(\varrho_{\text{flüssig}} - \varrho_{\text{gasförmig}})(T) \begin{cases} \sim (T_c - T)^\beta & \text{für } T \leq T_c \\ = 0 & \text{für } T \geq T_c \end{cases}$

Die Korrelationslänge

- Zustandsgleichung für 10^{23} Moleküle unverändert für $\frac{1}{2} \times 10^{23}$ Moleküle, nicht aber für $\frac{1}{2^{75}} \times 10^{23}$ Moleküle
- Wie weit kann man die Größe des Systems reduzieren, ohne seine qualitativen Eigenschaften zu verändern?

  $\longrightarrow$ Korrelationslänge ξ

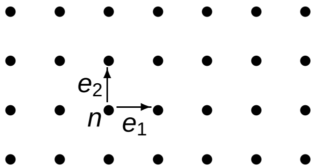
Zwei entgegengesetzte Situationen:

- Volumen ξ^3 enthält nur wenige (z.B. < 10) Moleküle
  $\Rightarrow$ Näherungsverfahren
- Volumen ξ^3 enthält sehr viele (z.B. $> 10^6$) Moleküle
  $\Rightarrow$ Phasenübergänge und kritische Phänomene
  $\xi = \infty$ am kritischen Punkt

Das Ising-Modell

- jedem Gitterpunkt $n \in \Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ wird Spin $s_n = \pm 1$ zugeordnet

  nur benachbarte Spins wechselwirken



- Energie (= Hamilton-Funktion) im Magnetfeld B ist

$$H(s,B) = -J \sum_{n \in \Gamma} \sum_{e} s_n s_{n+e} + B \sum_{n \in \Gamma} s_n$$

- Wahrscheinlichkeit der Konfiguration s:

$$p(s,T,B) = \frac{1}{Z}\, \mathrm{e}^{-H(s,B)/kT}$$

$$Z(T,B) = \sum_{s} \mathrm{e}^{-H(s,B)/kT} \qquad \text{– Zustandssumme}$$

$$F(T,B) = -kT \ln Z \qquad \text{– freie Energie}$$

- Magnetisierung $M(T,B) = \left\langle \frac{1}{vol(\Gamma)} \sum_{n\in\Gamma} s_n \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{F}{vol(\Gamma)}\right)$
- Spin-Korrelation $\Gamma_n = \langle s_n s_0\rangle - \langle s_n\rangle\langle s_0\rangle$

Phasenübergang am kritischen Punkt $T = T_c$ (Curie-Punkt)

- ferromagnetsiche Phase für $T < T_c$: $M \neq 0$ bei $B = 0$ (spontane Magnetisierung)
- paramagnetische Phase für $T > T_c$: $M = \text{const} \cdot B$

- $M(T,0) \begin{cases} \sim (T_c - T)^\beta & \text{für } T \leq T_c \\ = 0 & \text{für } T \geq T_c \end{cases}$
- $\Gamma_n(T,0) \begin{cases} \sim \dfrac{\exp\left(-\frac{\|n\|}{\xi(T)}\right)}{\|n\|^{d-2}}, \quad \xi(T) \sim |T-T_c|^{-\nu} & \text{für } T \neq T_c \\ \sim \dfrac{1}{\|n\|^{d-2-\eta}} & \text{für } T = T_c \end{cases}$

kritische Exponenten $\beta, \nu, \eta, \ldots$ universell für alle Ferromagnete

Block-Spins [Kadanoff, 1966]

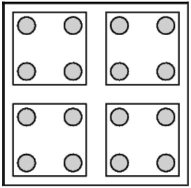
Situation: $\xi \gg 1$ (Spins korreliert)

1. Blöcke $B_n \subset \Gamma$ aus L^d Gitterpunkten

   Block-Spins

   $$s_n \approx \tilde{s}_n := \frac{1}{L^y} \sum_{k \in B_n} s_k\,, \quad 0 \le y \le d$$

   (thermische Fluktuationen reduzieren Gesamtspin)



2. ersetze $s_n = L^{y-d}\tilde{s}_n + \sigma_n$ in Zustandssumme:

   $$Z = \sum_{\tilde{s},\sigma} \exp\Big(-\frac{H(\tilde{s},\sigma,B)}{kT}\Big) =: \sum_{\tilde{s}} \exp\Big(-\frac{\tilde{H}(\tilde{s},T,B,y)}{kT}\Big)$$

   $\tilde{H}(\tilde{s},T,B,y)$ beschreibt effektive Wechselwirkung von Block-Spins $\tilde{s}_n$ auf Gitter der Weite L

3. Nach Reskalierung aller Längen um $\frac{1}{L}$ können wir $\tilde{s}$ wieder s nennen; Korrelationslänge wird ξ/L

Die Renormierungsgruppe [Wilson, 1971]

Ergebnis: Transformation $R_L : H(s) \mapsto \tilde{H}(s)$

- Eliminierung der Freiheitsgrade führt auf $R_{L^2} := R_L \circ R_L$ allgemein Halbgruppe $R_L \circ R_{L'} = R_{LL'}$ mit $L, L' \geq 1$

Definition

Die Menge der Transformationen $\{R_L\}$ heißt die Renormierungs*gruppe*.

$\Rightarrow$ Führt auf Hamilton-Funktion $H_\xi(s) := R_\xi(H)$ mit $\tilde{\xi} \approx 1$ (exakte Lösung des Problems)

$\longrightarrow$ im allgemeinen $R_\xi(H)$ nicht bestimmbar

Annahmen über allgemeinste Form der Hamilton-Funktion

$$H = -J\sum_n\sum_e s_n s_{n+e} + B\sum_n s_n$$

$$R_L(H) = J_1\sum_n\sum_e s_n s_{n+e} + B_1\sum_n s_n + \text{ü.n.N} + s^3\text{-Terme} + \dots$$

mit $J_1 = f(J)$ reell analytisch.

Korrelationslänge ist Funktion von J, also $\frac{1}{L}\xi[J] = \xi[f(J)]$

$$f(J_c) = J_c \quad \Leftrightarrow \quad \xi[J_c] = \infty \text{ (oder 0)}$$

Kritischer Punkt = Fixpunkt der Renormierungsgruppe

Völlig andere Problemstellung

Anstatt das Modells für gegebenes H zu lösen, finde Fixpunkte $H^* = R_L(H^*)$ der RG im Raum aller Hamilton-Funktionen

Fixpunkte sind selten! (z.B. Ising, mean-field, Gauß, Yang-Mills)

$\Rightarrow$ Universalität

Renormierungsgruppenfluß

$\{$ Hamilton-Op. H $\}$ $\Leftrightarrow$ $P := \{$Kopplungskonstanten K $\}$

RG definiert Fluß auf P durch $K(L) := R_L(K)$, $\quad L \geq 1$

- Fixpunkt der Renormierungsgruppe: $R_L(K^*) = K^*$
  $\longrightarrow$ Nullvektor von P
- Kritische Fläche $P^* = \{K \in P \;:\; \lim_{L\to\infty} R_L(K - K^*) = 0\}$

Physikalische Annahme

R_L ist linearer Operator bezüglich kleiner $(K - K^*)$ und besitzt vollständiges System $\{e_k\}$ von Eigenvektoren $R_L(e_k) = L^{x_k} e_k$

- $x_k > 0$ (relevante Wechselwirkungen): $\quad R_L(e_k) \to \infty$
- $x_k = 0$ (marginale Wechselwirkungen): $\quad R_L(e_k) \to const$
- $x_k < 0$ (irrelevante Wechselwirkungen): $\quad R_L(e_k) \to 0$

RG-Fluß für $\left\{ \begin{array}{c} \text{negative } x_k \text{ zum} \\ \text{positive } x_k \text{ weg vom} \end{array} \right\}$ Fixpunkt gerichtet

- $\mathrm{codim}(P^*) =$ Zahl der positiven x_k (i.a. klein)
- am Fixpunkt, d.h. makroskopisch, kann es nur relevante (evtl. marginale) Wechselwirkungen geben

Konsequenz

Systeme, die sich mikroskopisch durch unendlich viele irrelevante Wechselwirkungen unterscheiden, haben makroskopisch ein ähnliches Verhalten

- Makroskopische Phänomene zerfallen je nach Existenz und Art von Fixpunkten in Universalitätsklassen
- In jeder Klasse: Reduktion der Freiheitsgrade
  makroskopische Parameter $\Leftrightarrow$ positive x_k

Anwendungen: I. Ising-Modell

- zwei makroskopische Parameter: T und B
- kritischer Punkt K^* bei $T = T_c$ und $B = 0$

$T - T_c$ klein, aber $\neq 0$ $\quad B = 0,$ $\quad$ dann $x_k > 0 \Leftrightarrow k = 1$

- $K(T)$ glatt $\Rightarrow R_L(K(T))$ nähert sich K^* mit wachsendem L
- $T \neq T_c \quad \Rightarrow \quad R_L(K(T))$ entfernt sich von K^* für $L \to \infty$

$$K(T) - K^* = \sum_k u_k(T)\, e_k \;, \qquad u_1(T) = A(T - T_c) + \ldots \text{ (anaytisch)}$$

$$\begin{aligned} R_L(K(T) - K^*) &= u_1(T)\, L^{x_1} e_1 + \textstyle\sum_{k>1} u_k(T)\, L^{x_k} e_k \\ &= A(T - T_c) L^{x_1} e_1 + \ldots = \pm (L/\xi)^{\frac{1}{\nu}} e_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

für $\xi = |A(T - T_c)|^{-\nu}$ mit $\nu = \frac{1}{x_1}$ – kritischer Exponent

Anwendungen: II. Quantenfeldtheorie

- Wirkungsfunktional S statt Hamilton-Funktion, $\hbar$ statt $\frac{1}{kT}$

z.B. $$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi(x)(\Delta + m^2)\phi(x) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \right)$$

zwar erscheint Raum und Zeit als Kontinuum, Existenz der Erwartungswerte erfordert aber Regularisierung der Raumzeit

Annahme: *Diskretisierung ist real*

- Diskretisierungslänge a definiert Maßeinheit; Masse $\tilde{m}$, Kopplungskonstante $\tilde{\lambda}$, Korrelationslänge $\xi(\tilde{m}, \tilde{\lambda})$ sind dimensionslose reelle Zahlen
- Physikalische Korrelationslänge durch Masse $m = \frac{1}{\xi a}$ bestimmt; diese bleibt festgehalten
- Kontinuumslimes $a \to 0$ entspricht $\xi \to \infty$: Quantenfeldtheorie lebt auf kritischer Fläche

beobachtbare Physik bei Energie $E = m$ ist $S_{phys} = R_\xi(S_0)$

Konsequenzen aus der Renormierungsgruppe

- Gäbe es irrelevante Wechselwirkungen mit $x_k < 0$ in S_{phys}, so wären ihre Quellen in S_0 um $\xi^{-x_k} \to \infty$ skaliert. Dann existiert der Kontinuumslimes nicht.

$\Rightarrow$ Makroskopisch vorhandene irrelevante Wechselwirkungen sind nicht renormierbar.

- *Umgekehrt:* Ist S_0 allgemein gewählt mit beschränkten irrelevanten Wechselwirkungen, dann werden diese in S_{phys} mit ξ^{x_k} unterdrückt.

$\Rightarrow$ im Kontinuumslimes überleben nur die renormierbaren relevanten/marginale Wechselwirkungen

Folgerung: Physik der Elementarteilchen wird notwendig durch renormierbare Quantenfeldtheorien beschrieben!

- Einsteins Gravitationstheorie ist nicht renormierbar
  $\Rightarrow$ Gravitation wird durch Kontinuumslimes zu Null skaliert
- Gravition ist $\mathcal{O}(10^{40})$ mal schwächer als die elektomagnetische Kraft, aber sie existiert

$\Rightarrow$ Korrelationslänge ξ muß endlich sein, d.h. es gibt diskrete Struktur von Raum+Zeit bei Planck-Skala $a = 10^{-33}$ cm

Vorschlag: *Nichtkommutative Geometrie*

- *Programm:* kritische Punkte und Skalenexponenten x_k für Feldtheorien auf nichtkommutativen Geometrien
  $\rightarrow$ entspricht Renormierung
- Theorem [H. Grosse+R.W., 2004]
  Im ϕ^4-Modell auf der 4-dimensionalen Moyal-Ebene gibt es neben m, λ eine weitere marginale Kopplungskonstante Ω
- dank Ω hat das ϕ^4-Modell auf der Moyal-Ebene bessere nichtperturbative Eigenschaften