Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **WS 07/08**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 25.10.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n! := n \cdot (n-1)!$ mit $0! := 1$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}$, $\binom{\alpha}{n} := 0$ für $n \in \mathbb{Z}, n < 0$. Zeige:

(1) $\binom{\alpha}{0} = 1$

(2) $\binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha}{n}\frac{\alpha - n}{n+1} = \binom{\alpha - 1}{n}\frac{\alpha}{n+1}$ für $n \neq -1$

(3) $\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \binom{n + \alpha - 1}{n}$

(4) $\binom{\alpha + 1}{n} = \binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n-1}$

Aufgabe 2. Es sei M eine Menge mit n unterscheidbaren Elementen ($n \in \mathbb{N}, n \geq 0$). Zeigen Sie:
a) Die Anzahl aller Anordnungen der n Elemente von M ist $n!$.
b) Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von M.
c) Beweisen Sie mit b), daß für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

d) M besitzt 2^n Teilmengen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(1) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(4) $2^{n+1} + 3 \cdot 7^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

Aufgabe 4. Es sei $f_0 := 0, f_1 := 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Zeige:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$