Spektrale Tripel

Inhalt

Teil I
Einleitung

1 Programm

Spektrale Tripel sind der Rahmen für nichtkommutative *Differential*geometrie. Historischer Ausgangspunkt sind die Theoreme von Gelfand-Naimark und Serre-Swan. Sie besagen, daß sämtliche topologische Information eines kompakten Hausdorff-Raums X bzw. eines Vektorbündels über X aus der *kommutative* Algebra der stetigen Funktionen $C(X)$ bzw. aus einem endlich erzeugten projektiven Modul $\mathcal{E}$ über $C(X)$ rekonstruiert werden kann.

Die Verallgemeinerung dieser Strukturaussagen auf *nichtkommutative* Algebren $\mathcal{A}$ und projektive Moduln $\mathcal{E}$ über $\mathcal{A}$ und deren Untersuchung ist Gegenstand der Nichtkommutativen Geometrie. In der Vorlesung wird es um einen Teilaspekt gehen, nämlich die Charakterisierung *differenzierbarer und metrischer* Räume und ihre nichtkommutative Verallgemeinerung. Alain Connes hat erkannt, daß Differenzierbarkeit und Metrik gemeinsam durch einen weiteren Operator $\mathcal{D}$ in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ kodiert werden. Spektrale Tripel sind gegeben durch $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ und Bedingungen zwischen ihnen. Diese Bedingungen sind flexibel je nach interessierender Beispielklasse.

i) Wir starten mit den Bedingungen, die nach A. Connes im Fall einer *kommutativen* Algebra $\mathcal{A}$ die Rekonstruktion einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit aus $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ erlauben, und stellen wesentliche Ideen dieser Rekonstruktion vor.

ii) Anschließend geht es um fast-kommutative Geometrien, das sind Tensorprodukte aus kommutativen spektralen Tripeln mit Matrizen. Wir zeigen, daß Äquivalenzklassen solcher fast-kommutativen Geometrien Yang-Mills-Modelle der Physik beschreiben, und diskutieren im Detail das Spektralwirkungsprinzip: *Jede* Funktion des Spektrums von $\mathcal{D}$ enthält in asymptotischer Entwicklung die Wirkungsfunktionale der Gravitations- und Teilchenphysik.

iii) Im letzten Teil behandeln wir isospektrale Deformationen, in denen der Operator $\mathcal{D}$ und der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ unverändert aus einem kommutativen spektralen Tripel übernommen werden, die Algebra jedoch nichtkommutativ deformiert wird. Standardbeispiel ist der nichtkommutative Torus.

2 Gelfand-Naimark

Das Gelfand-Naimark-Theorem stellt eine 1:1-Korrespondenz her zwischen *kompakten Hausdorff-Räumen* und *kommutativen unitalen C^*-Algebren.* (Genauer gesagt ist es ein kontravarianter Funktor zwischen entsprechenden Kategorien.) Hausdorff-Räume sind topologische Räume, in denen die Punkte durch offene Umgebungen getrennt werden können, Gegenbeispiele sind pathologisch. Wir erinnern im folgenden an Definition und grundlegende Eigenschaften von C^*-Algebren.

Wir betrachten ausschließlich Algebren A über $\mathbb{C}$ und nehmen die Existenz eines Einselements $1 \in A$ an, $1a = a1 = a \quad \forall a \in A$ (A heißt dann *unital*). Die Algebra heißt *kommutativ*, wenn $ab = ba \quad \forall a, b \in A$.

Eine *normierte Algebra* ist eine Algebra A zusammen mit einer Abbildung $\| \; \| : A \to \mathbb{R}$, die die drei Normaxiome für Vektorräume erfüllt und zusätzlich $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ und $\|1\| = 1$. Eine bezüglich der Norm vollständige normierte Algebra heißt Banach-Algebra.

Eine $*$-*Operation* (Involution) auf A ist eine Abbildung $* : A \to A$, für die gilt:

$$(a+b)^* = a^* + b^* \; , \quad (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^* \; , \quad (ab)^* = b^* a^* \; , \quad (a^*)^* = a \; .$$

Dann heißt A eine $*$-Algebra oder *involutive Algebra*.

Eine *Banach-$*$-Algebra* ist eine involutive Banach-Algebra $(A, \| \; \|)$, für die $\|a^*\| = \|a\|$ gilt. Daraus folgt $\|a^* a\| \leq \|a\|^2$. Gilt sogar die Gleichheit, so liegt eine C^*-Algebra vor:

Definition 2.1 Eine C^*-*Algebra* ist eine involutive Banach-Algebra $(A, \| \; \|, *)$ mit der C^*-Eigenschaft $\|a^* a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$.

Die C^*-Eigenschaft ist sehr einschränkend: Man kann zeigen, daß die C^*-Norm eindeutig ist, und Isomorphismen zwischen C^*-Algebren sind automatisch isometrisch.

Beispiel 2.2 Das Standardbeispiel einer C^*-Algebra ist die Algebra $C(X) \ni f$ der stetigen (komplexwertigen) Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X (das Urbild $f^{-1}(V)$ offener Mengen $V \subset \mathbb{C}$ ist offen in X), zusammen mit der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ und der Involution $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Bekanntlich ist $(C(X), \| \; \|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum (stetige Funktionen auf kompakten Räumen sind gleichmäßig stetig, so daß Cauchy-Folgen (f_k) stetiger Funktionen gegen eine stetige Funktion konvergieren). Es gilt

$$\|fg\| = \sup_{x \in X} (|f(x)| \, |g(x)|) \leq \big(\sup_{x \in X} |f(x)| \big) \big(\sup_{x \in X} |g(x)| \big) = \|f\| \, \|g\|$$

und $\|f\| = \|f^*\|$, also ist $C(X)$ Banach-$*$-Algebra. Schließlich nehmen stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Räumen ihr Supremum an, d.h. es gibt ein $p \in X$ mit $\|f\| = |f(p)|$ und deshalb

$$\|f^* f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|^2 = |f(p)|^2 = \|f\|^2 \; ,$$

d.h. $C(X)$ ist C^*-Algebra.

Beispiel 2.3 Es sei $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein komplexer Hilbert-Raum (d.h. vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt definierten Norm). Es sei $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ der Vektorraum der linearen und beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ zusammen mit der Operator-Norm $\|T\| := \sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|\leq 1} \|Ax\|$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Banach-Raum, sogar eine Banach-Algebra wegen $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ und deshalb $\|TSx\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz definiert $\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle$ eindeutig den zu $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ adjungierten Operator $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$. Schließlich gilt nach Cauchy-Schwarz

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2 ,$$

also nach Supremumsbildung $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$. Damit ist $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra.

Ein zweites Theorem von Gelfand-Naimark besagt, daß jede C^*-Algebra isomorph zu einer C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist. Ein entscheidender Schritt im Beweis ist die GNS-Konstruktion.

Definition 2.4 Es sei A eine komplexe unitale Banach-Algebra und $a \in A$. Das *Spektrum* von a ist die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$sp(a) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ (a - z1) \text{ ist nicht invertierbar in } A\} ,$$

und $r(a) := \sup\{|\lambda|\ :\ \lambda \in sp(a)\}$ heißt *Spektralradius*. Das Komplement des Spektrums $\mathbb{C} \setminus sp(a)$ ist die *Resolventenmenge* von a.

Die geometrische Reihe $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$ konvergiert für $\|a\| < |z|$ gegen $(a-z1)^{-1}$, so daß $r(a) \leq \|a\|$. Die Resolventenmenge ist offen, denn mit T ist für $\|T - T'\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ auch $T' = T(1 - T^{-1}(T - T'))$ invertierbar. Das Spektrum ist also abgeschlossen und wegen $r(a) \leq \|a\|$ kompakt. Ebenso ergibt sich aus der geometrischen Reihe, daß die Resolventenfunktion $z \mapsto (a - z1)^{-1}$ holomorph auf der Resolventenmenge ist. Damit ist das Spektrum nichtleer, denn sonst würde die Resolventenfunktion eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe, beschränkte und nichtkonstante Funktion sein, im Widerspruch zum Satz von Liouville. Mittels Holomorphie und Funktionalkalkül kann man die Spektralradiusformel

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

beweisen. Für normale Elemente ($aa^* = a^*a$) einer C^*-Algebra zeigt man daraus, daß $r(a) = \|a\|$ gilt. Uns genügt später ein Spezialfall: $r(a^*a) = \lim_{n\to\infty} \|(a^*a)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a^*a\|$. Insbesondere gilt $r(a) = \|a\|$ in jeder kommutativen C^*-Algebra.

Beispiel 2.5 Für die Algebra $A = C(X)$ der stetigen Funktionen ist $sp(f) = \{f(x)\ :\ x \in X\}$ der Wertebereich der Funktion.

Definition 2.6 Ein *Charakter* auf einer unitalen normierten Algebra A ist ein von 0 verschiedener Algebrenhomomorphismus $\chi : A \to \mathbb{C}$.

Es gilt $\chi(1) = 1$ und $\|\chi\| = 1$, denn sei $\chi(a) = \lambda$, dann ist $\chi(a - \lambda 1) = 0$, also $\lambda \in sp(a)$ und somit $|\chi(a)| = |\lambda| \leq r(a) \leq \|a\|$. Also $\|\chi\| \leq 1$ und $\|\chi\| \geq 1$ aus $\chi(1) = 1$.

Sei A nun kommutativ und $X = Spec(A)$ der Raum der Charaktere auf A. Offenbar ist $Spec(A)$ Teilmenge der Einheitsvollkugel A'_1 des Dualraums A' von A. Das *Banach-Alaoglu-Theorem* besagt, daß A'_1 kompakt in der schwach-$*$-Topologie von A' ist. Außerdem ist A' ein Hausdorff-Raum bezüglich der schwach-$*$-Topologie. Man zeigt, daß $Spec(A)$ abgeschlossen ist (Das Komplement, also die Menge der linearen stetigen Funktionale, die keine Algebrenhomomorphismen sind, ist schwach-$*$-offen). Somit ist X ein kompakter Hausdorff-Raum (mit der Relativtopologie aus A').

Definition 2.7 Sei A kommutative Banach-Algebra und $a \in A$. Die (nach Definition der schwach-$*$-Topologie stetige) Abbildung $\hat{a} : Spec(A) \to \mathbb{C}$, mit $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$, heißt *Gelfand-Transformierte* zu a. Die Abbildung $\rho : A \to C(Spec(A))$, mit $\rho(a) := \hat{a}$, heißt *Gelfand-Transformation*.

Offenbar ist $C(X)$ wieder eine kommutative C^*-Algebra.

Theorem 2.8 (Gelfand-Naimark) *Es sei A eine kommutative C^*-Algebra. Die Gelfand-Transformation ist ein isometrischer Isomorphismus $\rho : A \to C(Spec(A))$.*

Beweis. Wir verwenden (mit anderen Bezeichnungen) [26].

Klar ist, daß ρ ein Algebrenhomomorphismus zwischen normierten Algebren ist. Zu zeigen ist i) $\|\rho(a)\| = \|a\|$ für alle $a \in A$, was die Injektivität liefert, und ii) die Surjektivität.

i) Es gilt $|\rho(a)(\chi)| = \|\chi(a)\| \leq \|\chi\|\|a\| = \|a\|$ für alle $\chi \in Spec(A)$, also nach Supremumsbildung $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$. Insbesondere ist ρ stetig.

Man zeigt für C^*-Algebren mittels Polarisationsformeln oder Funktionalkalkül, daß ρ ein $*$-Homomorphismus ist, $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$. Das Spektrum selbstadjungierter positiver Elemente von A ist reell und positiv. Das Spektrum ist abgeschlossen, also ist $r(a^*a) \in sp(a^*a)$. Wenn man beweisen kann, daß es zu jedem Spektralwert $\lambda \in sp(a)$ einen Charakter χ gibt mit $\chi(a) = \lambda$, so folgt

$$\chi(a^*a) = \chi(a^*)\chi(a) = |\hat{a}(\chi)|^2 = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 .$$

Also folgt $\|\hat{a}\| = \sup_{\chi \in Spec(A)} |\hat{a}(\chi)| \geq \|a\|$, zusammen mit der anderen Ungleichung also $\|\hat{a}\| = \|a\|$ für alle $a \in A$.

Es bleibt $\chi(a) = \lambda$ zu zeigen. Dazu ist eine Verbindung zwischen Charakteren und maximalen Idealen zu verwenden. Ein (echtes) Ideal $1 \notin I \ni b$ einer Algebra

$A \ni a$ ist ein linearer Teilraum mit $ab, ba \in I$. Zunächst ist $\ker \chi$ ein Ideal in A. Dieses ist maximal (nicht enthalten in einem echten Ideal I), denn für $a \in I \backslash \ker \chi$ ist $\chi(a)$ invertierbar. Wähle $b \in A$ mit $\chi(a)\chi(b) = 1$ (χ ist surjektiv!), dann ist $ab \in I$ und $ab - 1 \in \ker \chi \subset I$, also $1 \in I$, Widerspruch. Sei umgekehrt I ein maximales Ideal von A, dann zeigt man unter Verwendung des Lemmas von Zorn, daß A/I ein Körper ist. Nach dem Satz von Gelfand-Mazur ist dann $A/I \simeq \mathbb{C}$: Denn sei $A/I \ni b \neq 0$ und $\lambda \in sp(b)$ (nichtleer), dann ist $b - \lambda 1$ nicht invertierbar, also $b = \lambda 1$. Damit definiert jedes maximale Ideal I einen Charakter $\chi_I : A \to A/I \to \mathbb{C}$, mit $I = \ker \chi_I$.

Daraus folgt nun, daß es zu jedem $\lambda \in sp(a)$ ein $\chi \in Spec(A)$ gibt mit $\chi(a) = \lambda$. Denn $A(a - \lambda 1) \not\ni 1$ ist echtes Ideal, und dieses ist in einem maximalen Ideal $\ker \chi_I$ enthalten. Wegen $1 \in A$ folgt also $a - \lambda 1 \in \ker \chi_I$, d.h $\chi_I(a) = \lambda$.

ii) Surjektivität folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß:
Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und B Unteralgebra von $C(X)$. Wenn B
i) die Punkte von X trennt, d.h. für alle $x, y \in X$ gibt es $f \in B$ mit $f(x) \neq f(y)$,
ii) nicht identisch verschwindet, d.h. für alle $x \in X$ gibt es $f \in B$ mit $f(x) \neq 0$,
iii) abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist,
dann liegt B dicht in $C(X)$ bezüglich der Norm-Topologie.

Sei $B = \rho(A) \subset C(Spec(A))$. Seien $\chi_1 \neq \chi_2$ Charaktere. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$, also $\hat{a}(\chi_1) \neq \hat{a}(\chi_2)$, und $\hat{a} \in B$ trennt die Punkte. Wegen $\hat{1}(\chi) = 1$ verschwindet B nicht identisch. Mit $\rho(a)$ liegt auch $\rho(a)^* = \rho(a^*)$ in B. Also liegt B dicht in $C(Spec(A))$ Wegen $\|\rho(a)\| = \|a\|$ ist B vollständig in der Norm-Topologie (ist $(\widehat{a_k})$-Cauchy-Folge, so auch (a_k), die gegen $a \in A$ konvergiert), also abgeschlossen und gleich $C(Spec(A))$. $\square$

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Es verbleibt zu zeigen, daß $Y = Spec(C(X))$ wieder homöomorph zu X ist. Nach Definition der schwach-*-Topologie genügt es zu zeigen, daß es eine Bijektion zwischen X und $Spec(C(X))$ als Mengen gibt.

Sei $\epsilon_x : C(X) \to \mathbb{C}$ die Auswertung in $x \in X$, d.h. $\epsilon_x(f) = f(x)$. Damit ist ϵ_x ein Charakter, und

$$\ker \epsilon_x = \{f \in C(X) \; : \; f(x) = 0\}$$

ist maximales Ideal von $C(X)$. Somit liefert die Auswertung eine Abbildung $\epsilon : X \to Spec(C(X)$, die in der schwach-*-Topologie von $Spec(C(X)$ stetig ist.

Sei umgekehrt $\chi \in Spec(C(X))$, dann ist $\ker \chi$ ein maximales Ideal in $C(X)$. Angenommen, $I = \ker \chi$ wäre verschieden von allen $\ker \epsilon_x$. Insbesondere wäre I in keinem $\ker \epsilon_x$ enthalten, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $g_x \in I$ mit $g_x(x) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit ist dann auch $g_x(y) \neq 0$ für alle y aus einer Umgebung U_x von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ mit $f = \sum_{i=1}^n |g_{x_i}|^2 \in I$ überall verschieden von 0. Also ist f invertierbar und $1 = f^{-1} \cdot f \in I$, Widerspruch. Also ist ϵ bijektiv.

3 Serre-Swan

Definition 3.1 Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Ein (komplexes) lokal-triviales *Vektorbündel über* X ist gegeben durch einen topologischen Raum E und eine stetige surjektive Abbildung $p : E \to X$, so daß gilt:

- Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Faser $E_x := p^{-1}(x) \subset E$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum.
- Zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung U und eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so daß $p^{-1}(U)$ homöomorph zu $\mathbb{C}^m \times U$ ist.

Ein (globaler) *Schnitt* von $E \xrightarrow{p} X$ ist eine stetige Abbildung $s : X \to E$ mit $p \circ s = id_X$. Mit $\Gamma(E, S)$ werde der Vektorraum der Schnitte von $E \xrightarrow{p} X$ bezeichnet.

Dabei ist $(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)(x) := \lambda_1 s_1(x) + \lambda_2 s_2(x)$. Durch $(sf)(x) := s(x)f(x)$ für $f \in C(X)$ wird $\Gamma(E, S)$ zu einem Modul über $C(X)$. Das bedeutet, daß in den Vektorraum-Axiomen $\mathbb{C}$ durch $C(X)$ ersetzt werden kann. Es übertragen sich alle Strukturen, die nicht die Division erfordern. Lineare Unabhängigkeit über $C(X)$ ist nicht sinnvoll, im Gegensatz zum Begriff des Erzeugendensystems: Ein $C(X)$-Modul $\mathcal{E}$ heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Familie $\eta_1, \dots, \eta_k$ gibt, so daß jedes $\eta \in \mathcal{E}$ (nicht notwendig eindeutig) darstellbar ist als $\eta = \sum_{i=1}^k \eta_i f_i$ für $f_i \in C(X)$.

Ein $C(X)$-Modul $\mathcal{E}$ heißt *frei*, wenn $\mathcal{E}$ homöomorph zu $\mathbb{C}^m \otimes C(X)$ ist. Offenbar ist der Vektorraum der Schnitte des *global trivialen* Vektorbündels $E = \mathbb{C}^m \times X$ ein freier $C(X)$-Modul. Ein Erzeugendensystem ist $(e_i \otimes 1)_{i=1,\dots,m}$, wobei (e_i) eine Basis von $\mathbb{C}^m$ ist und $1 \in C(X)$ die konstante Funktion.

Für Vektorräume und $C(X)$-Moduln läßt sich eine direkte Summe erklären. Sind E_1, E_2 Vektorbündel über X, dann ist die Whitney-Summe $E_1 \oplus E_2$ erklärt als die Teilmenge von $E_1 \times E_2 \ni (e_1, e_2)$ mit $p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Moduln über $C(X)$, dann ist auch die direkte Summe $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \ni (\eta_1, \eta_2)$ ein $C(X)$-Modul mit $(\eta_1, \eta_2)f := (\eta_1 f, \eta_2 f)$. Ein $C(X)$-Modul $\mathcal{E}$ heißt *projektiv*, wenn es einen $C(X)$-Modul $\mathcal{E}'$ gibt, so daß $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ ein freier Modul ist.

Theorem 3.2 (Swan, 1962 [48]) *Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Ein $C(X)$-Modul $\mathcal{E}$ ist genau dann isomorph zu einem Modul der Form $\Gamma(E, X)$ für ein lokal-triviales Vektorbündel $E \xrightarrow{p} X$, wenn $\mathcal{E}$ endlich erzeugt und projektiv ist.*

Beweis. Die Originalarbeit von Swan [48] und die Arbeit von Landi [34] sind gute Referenzen.

i) Sei $E \xrightarrow{p} X$ beliebiges lokal-triviales Vektorbündel über X. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{E} = \Gamma(E, X)$ ein endlich erzeugter projektiver $C(X)$-Modul ist. Wegen der lokalen Trivialität existiert zu jedem $x \in X$ eine Familie $s_{x,1}, \dots, s_{x,m} \in \Gamma(E, X)$, die eine lokale Basis von $p^{-1}(U_x) \simeq \mathbb{C}^m \times U$ über einer Umgebung

$U_x \subset X$ von x bildet. (Zunächst kann $s_{x,1}(x), \ldots, s_{x,m}(x) \in E_x \simeq \mathbb{C}^m$ linear unabhängig gewählt werden. Wegen der Stetigkeit sind aber auch $s_{x,1}(y), \ldots, s_{x,m}(y)$ linear unabhängig für alle $y \in U_x$.)

Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{E}$, so daß für jeden Punkt $x \in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ von $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ aufgespannt wird. Also ist $\mathcal{E}$ endlich erzeugt durch $s_1, \ldots, s_n$. Sei $\mathcal{F} = \mathbb{C}^n \otimes C(X) = \Gamma(\mathbb{C}^n \times X, X)$ der freie $C(X)$-Modul mit n Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$. Die Abbildung $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ definiert durch $\pi(e_i) = s_i$ und Fortsetzung über die Modulstruktur ist surjektiv und stetig. Da die Dimension des Bildes von π lokal konstant ist, ist mit $\mathrm{im}(\pi) = \mathcal{E}$ auch $\ker(\pi) =: \mathcal{E}'$ ein $C(X)$-Modul (siehe [48, Proposition 1]), und es gilt $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$. Damit ist $\mathcal{E}$ projektiv.

ii) Sei $\mathcal{E}$ ein endlich erzeuger projektiver $C(X)$-Modul, d.h. $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} = \mathbb{C}^n \otimes C(X)$. Sei $\mathcal{F} \ni \xi = (\eta, \eta')$ die entsprechende Zerlegung, mit $\xi f = (\eta f, \eta' f)$. Sei $e : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ gegeben durch $e\xi = (\eta, 0)$, dann gilt $e^2 = e$ und $(e\xi)f = e(\xi f)$ sowie $\mathcal{E} \simeq \mathrm{im}(e)$ und $\mathcal{E}' \simeq \ker(e)$.

Sei $x \in X$ und $I_x = \{f \in C(X) \; : \; f(x) = 0\}$ das entsprechende maximale Ideal in $C(X)$. Dann besteht $\mathcal{F}I_x$ aus den in x verschwindenden Elementen aus $\mathcal{F}$, und $\mathcal{F}/\mathcal{F}I_x$ besteht aus den Äquivalenzklassen von Elementen aus $\mathcal{F}$ mit gleichem Wert in x. Damit liefert die Auswertung $\xi \mapsto \xi(x)$ einen Isomorphismus $\mathcal{F}/\mathcal{F}I_x \simeq F_x \simeq \mathbb{C}^n$. Wegen $(e\xi)f = e(\xi f)$ erhält e den Untermodul $e\mathcal{F}I_x$, so daß die Auswertung $e\xi \mapsto (e\xi)(x)$ einen Isomorphismus $e\mathcal{F}/e\mathcal{F}I_x \simeq E_x$ zu einem Untervektorraum $E_x \subset \mathbb{C}^m$ liefert. Wenn wir zeigen können, daß die Dimension von E_x lokal konstant ist, dann definieren diese Fasern E_x ein lokal-triviales Vektorbündel.

Sei $\dim(E_x) = m$. Dann existieren m linear unabhängige stetige Schnitte $s_1, \ldots, s_m$ von $\mathbb{C}^n \times X$ derart, daß $(es_i)(x) = s_i(x)$. Dann sind die es_i auch in einer Umgebung U von x linear unabhängig (wie oben), also ist $\dim(E_y) \geq m$ für alle $y \in U$. Wiederholung der Argumentation für die Idempotente $1 - e$ führt auf den komplementären Faserraum E'_x der Dimension $n - m$. Folglich ist $\dim(E'_y) \geq n - m$. Da die Gesamtdimension konstant ist, folgt $\dim(E_x) = m$ lokal konstant. Das Vektorbündel ist nun $E = \bigcup_{x \in X} E_x \times \{x\}$ mit $p^{-1}(U) = \mathrm{span}(es_1, \ldots, es_m) \times_x U$. □

Es sei bemerkt, daß sich die Konstruktion auch für andere Funktionsklassen durchführen läßt wie z.B. Vektorbündel über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $C^\infty(X)$-Modulstruktur der Schnitte (z.B. [34]). In Connes' Rekonstruktionstheorem wird eine Verallgemeinerung auf $L^\infty(X)$ benötigt.

In der nichtkommutativen Geometrie läßt man die Forderung der Kommutativität weg und betrachtet endlich erzeugte projektive Moduln über (weitgehend) beliebigen Algebren. Die Klassifikation dieser Moduln ist Gegenstand der K-Theorie.

Beispiel 3.3 (z.B. [31]) Für $X = S^2$ und $n_1, n_2, n_3 \in C(X)$ werde $e \in$

$M_2(C(X))$ definiert als

$$e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 - \mathrm{i}n_2 \\ n_1 + \mathrm{i}n_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$e = e^* \Leftrightarrow n_i = \overline{n_i} \;, \qquad e^2 = e \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1 \;,\; n_i n_j = n_j n_i \text{ für } i \neq j \;.$$

Mit anderen Worten, e ist genau dann ein Projektor, wenn $n = (n_1, n_2, n_3)$ eine stetige Abbildung $n : S^2 \to S^2$ ist. Es gilt $\mathrm{rang}(e) = \mathrm{tr}(e) = 1$. Damit definiert $\mathcal{E} = e(\mathbb{C}^2 \otimes C(S^2))$ ein komplexes Linienbündel über der S^2. Es steht in Verbindung zum komplexen Hopf-Bündel $U(1) \to S^3 \to S^2$.

Interessant ist, daß wenn $\mathcal{A}$ die von den Einträgen e_{ij} von e erzeugte Operatoralgebra ist, die Bedingung $e = e^2 = e^*$ erzwingt, daß $\mathcal{A} = C(S^2)$ ist [11]. Für den vierdimensionalen Fall ergibt sich nicht nur die S^4 als Lösung, sondern auch die Connes-Landi-Sphären [12].

Teil II
Kommutative spektrale Tripel

4 Diskussion der Definition

Zunächst werde die Algebra $\mathcal{A}$ als kommutativ vorausgesetzt. Dadurch läßt sich der Anschluß an die übliche Differentialgeometrie realisieren. Jedoch werden die Strukturen so formuliert, daß sie sich leicht ins Nichtkommutative verallgemeinern lassen. Wir geben zunächst die Originaldefinition aus [15].

Definition 4.1 Ein kommutatives spektrales Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ der Dimension $p \in \mathbb{N}$ besteht aus einer kommutativen involutiven unitalen Algebra $\mathcal{A}$, dargestellt in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, und einem selbstadjungierten Operator $\mathcal{D}$ in $\mathcal{H}$, eingeschränkt durch 5 Bedingungen:

1) *Dimension.* Die Resolvente von $\mathcal{D}$ ist ein kompakter Operator, und ihr n-ter charakteristischer Wert ist von Ordnung $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{p}})$.
2) *Ordnung-Eins.* $[[\mathcal{D}, f], g] = 0$ für alle $f, g \in \mathcal{A}$.
3) *Regularität.* Für beliebiges $f \in \mathcal{A}$ und $m \in \mathbb{N}$ liegen f und $[\mathcal{D}, f]$ im Definitionsbereich des Operators δ^m, wobei $\delta T := [|\mathcal{D}|, T]$ für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
4) *Orientierbarkeit.* Sei $\pi_\mathcal{D} : \mathcal{A}^{\otimes(p+1)}$ die Abbildung $\pi_\mathcal{D}(f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_p) := f_0[\mathcal{D}, f_1] \cdots [\mathcal{D}, f_p]$. Es existiert ein Hochschild-p-Zykel $c \in Z_p(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, so daß für $\gamma := \pi_\mathcal{D}(c)$ gilt $\gamma = 1$ für p ungerade und $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$ sowie $\mathcal{D}\gamma = -\gamma\mathcal{D}$ für p gerade.
5) *Endlichkeit und absolute Stetigkeit.* Der Raum $\mathcal{H}_\infty = \bigcap_{m=0}^\infty \mathrm{dom}(\mathcal{D}^m) \subset \mathcal{H}$ ist ein endlich erzeugter projektiver $\mathcal{A}$-Modul, $\mathcal{H}_\infty = e\mathcal{A}^n$. Für die dadurch definierte hermitesche Struktur
$$(\mid) : \mathcal{H}_\infty \times \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{A}\;, \;\; (\xi|\eta) = \sum_{i=1}^n \xi_i^* \eta_i \in \mathcal{A} \qquad \text{für } \xi, \eta \in e\mathcal{A}^n$$
gilt $\langle \xi, \eta \rangle = \displaystyle{\int\!\!\!\!\!-} (\xi|\eta)|\mathcal{D}|^{-p}$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\infty$, wobei $⨍ T$ der Koeffizient der logarithmischen Divergenz von $\mathrm{Tr}(T)$ ist.

Die Definition enthält *sehr viel* Information, die wir zumindest zum Teil diskutieren werden. Zunächst jedoch das Rekonstruktionstheorem, welches die Definition motiviert.

Theorem 4.2 (Connes, 2008 [15]) *Es sei $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{H})$ ein kommutatives spektrales Tripel, und die Bedingungen 1) bis 5) seien in stärkerer Form realisiert:*

- *Alle Endomorphismen $T \in \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{H}_\infty)$ sind regulär.*

- *Der Hochschild-Zykel ist antisymmetrisch, d.h.* $c = \sum_\alpha \sum_{\beta \in S_p} \epsilon(\beta) a_\alpha^0 \otimes a_\alpha^{\beta(1)} \otimes \dots a_\alpha^{\beta(p)}$*, wobei* $\epsilon(\beta)$ *das Vorzeichen der Permutation* β *ist.*

Dann existiert eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit X*, und* $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ *ist die Algebra der glatten Funktionen auf* X*. Umgekehrt definiert jede kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit ein spektrales Tripel mit diesen Bedingungen.*

Es gibt ein weiteres Theorem [15], welches unter anderen Zusatzbedingungen sicherstellt, daß X eine Spin^c-Mannigfaltigkeit ist, und $\mathcal{D}$ ist dann ein Dirac-Operator. Eine (zusätzliche) Realitätsbedingung liefert sogar eine Spinstruktur [23], und die sogenannte Spektralwirkung wählt den Levi-Civita-Zusammenhang aus.

4.1 Unbeschränkte Operatoren

Zunächst folgt aus 1), daß $\mathcal{D}$ unbeschränkt ist für $p > 0$. Wir stellen Eigenschaften unbeschränkter Operatoren bereit (z.B. [43, 52]).

Mit $\mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H}$ werde der Definitionsbereich eines linearen (unbeschränkten) Operators $\mathcal{T}$ bezeichnet. Der *Graph* von T ist die Menge $\Gamma(T)$ der Paare $(\phi, T\phi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit $\phi \in \mathrm{dom}(T)$. Ein Operator T heißt *abgeschlossen*, wenn $\Gamma(T) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ abgeschlossen ist. Das bedeutet, daß $\mathrm{dom}(T)$ vollständig ist bezüglich der Graphennorm $\|(\phi, T\phi)\| = \|\phi\| + \|T\phi\|$. Äquivalent: Ist (ϕ_n) eine Folge in $\mathrm{dom}(T)$ mit $\phi_n \to \phi \in \mathcal{H}$ und $T\phi_n \to \psi \in \mathcal{H}$, dann gilt $\phi \in \mathrm{dom}(T)$ und $\psi = T\phi$. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen besagt: Es sei $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ abgeschlossener Operator zwischen Hilbert-Räumen. $\mathrm{dom}(T)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. Dieser Satz steht in Verbindung zum Satz von der offenen Abbildung: Jede stetige lineare surjektive Abbildung zwischen Hilbert-Räumen ist offen, d.h. bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. In diesen Sätzen kann Hilbert-Raum durch Banach-Raum ersetzt werden.

Eine Erweiterung von T ist ein Operator T_1 mit $\mathrm{dom}(T_1) \supset \mathrm{dom}(T)$ und $T_1\phi = T\phi$ für alle $\phi \in \mathrm{dom}(T)$. Ein Operator T heißt abschließbar, wenn eine abgeschlossene Erweiterung T_1 existiert. In diesem Fall gibt es eine kleinste abgeschlossene Erweiterung $\bar{T}$, der Abschluß von T.

Für einen linearen dicht definierten Operator $T : \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{H}$ ist der lineare Teilraum $\mathrm{dom}(T^*)$ definiert als die Menge aller $\phi \in \mathcal{H}$, für die es ein $\eta \in \mathcal{H}$ gibt mit $\langle T\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle$ für alle $\psi \in \mathrm{dom}(T)$. Dann ist der adjungierte Operator T^* erklärt durch $T^*\phi = \eta$. T^* ist immer abgeschlossen, und T ist abschließbar, wenn $\mathrm{dom}(T^*) \subset \mathcal{H}$ dicht ist. In diesem Fall ist $\bar{T} = T^{**}$.

Ein linearer dicht definierter Operator T heißt

- symmetrisch, wenn $\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T^*)$ und $T\phi = T^*\phi$ für alle $\phi \in \mathrm{dom}(T)$.

- selbstadjungiert, wenn $T = T^*$, d.h. $\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(T^*)$ und T symmetrisch.
- wesentlich selbstadjungiert, wenn T symmetrisch ist und $\bar{T}$ selbstadjungiert ist.

Damit sind selbstadjungierte Operatoren automatisch abgeschlossen.

Für abgeschlossene Operatoren T kann man eine Spektraltheorie einführen. Eine komplexe Zahl λ gehört zur Resolventenmenge $R(T)$, wenn $\lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T : \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv ist und die *Resolvente* $R_\lambda(T) := (\lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1}$ beschränkt ist. Die Resolventenmenge ist offen in $\mathbb{C}$, und die Resolventenfunktion $\lambda \mapsto (\lambda \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1}$ ist holomorph auf $R(T)$. Das Komplement $sp(T) = \mathbb{C} \setminus R(T)$ ist das Spektrum von T, es ist abgeschlossen, im allgemeinen nicht kompakt und kann sogar leer sein. Selbstadjungierte Operatoren haben reelles Spektrum. Über die Cayley-Transformation $T \mapsto U_T := (\mathrm{i}\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)(-\mathrm{i}\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1}$ werden selbstadjungierte Operatoren auf unitäre Operatoren abgebildet mit $\mathrm{id} - U_T$ injektiv. Aus dem Spektralmaß für unitäre Operatoren kann dann ein Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren bewiesen werden: $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Für abgeschlossene Operatoren gibt es eine eindeutige Polarzerlegung $T = F|T|$. Dabei ist $|T|$ ein positiver selbstadjungierter Operator mit $\mathrm{dom}(|T|) = \mathrm{dom}(T)$ und $\ker T = \ker |T|$, und F ist eine partielle Isometrie von $(\ker T)^\perp$ nach $\overline{\mathrm{im}(T)}$. Ist T normal, dann kommutiert F mit $|T|$ und damit mit T. Ist T selbstadjungiert (insbesondere normal), dann ist $F^2 = 1$ auf $(\ker T)^\perp$. Für $0 \notin sp(T)$ kann $|T|$ charakterisiert werden durch $|T| = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \frac{T^*T}{T^*T + \lambda}$.

Zurück zur Definition. Die Endlichkeit charakterisiert $\mathcal{H}_\infty = \bigcap_{m=0}^\infty \mathrm{dom}(\mathcal{D}^m)$. Aus der Selbstadjungiertheit von $\mathcal{D}$ folgt, daß $\mathcal{H}_\infty$ dicht in $\mathcal{H}$ ist (Reed-Simon 2: X.6): Für einen dicht definierten abgeschlossenen Operator T auf $\mathcal{H}$ ist T^*T selbstadjungiert, insbesondere dicht definiert. Somit ist mit $\mathcal{D}$ auch $\mathcal{D}^2$ und induktiv $\mathcal{D}^{2^m}$ selbstadjungiert auf $\mathcal{H}$, folglich ist $\mathrm{dom}(\mathcal{D}^{2^m})$ dicht in $\mathcal{H}$. Die Behauptung folgt nun aus $\mathrm{dom}(\mathcal{D}^m) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{D}^k)$ für $k \geq m$. Bezeichne $\mathcal{D}_\infty$ die Einschränkung von $\mathcal{D}$ auf den Definitionsbereich $\mathcal{H}_\infty$, dann ist $\mathcal{D}_\infty$ wesentlich selbstadjungiert, da symmetrisch und $\overline{\mathcal{D}_\infty} = \mathcal{D}$. Damit ist $\mathcal{H}_\infty$ determinierender Bereich (core) für $\mathcal{D}$, d.h. $(\mathcal{D}_\infty, \mathcal{H}_\infty)$ mit dem Skalarprodukt aus 5) beinhalten schon die gesamte Information über $(\mathcal{D}, \mathcal{H})$.

Die Regularität 3) beinhaltet zunächst, daß für $T = \delta^{m-1} f$ oder $T = \delta^{m-1}[\mathcal{D}, f]$ gilt: T ist beschränkt mit $T\mathrm{dom}(|\mathcal{D}|) \subset \mathrm{dom}(|\mathcal{D}|)$ und $\delta(T)$ beschränkt. Da man sich aber auf den dichten Teilraum $\mathcal{H}_\infty$ einschränken kann, genügt es zu fordern (Lemma 13.1 von [Connes, 2008]), daß T und $[|\mathcal{D}|, T]$ auf $\mathcal{H}_\infty$ beschränkt sind. Die Stetigkeit liefert dann eine eindeutige Fortsetzung zu beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$. Insbesondere ist $f, [\mathcal{D}, f] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, was in manchen Definitionen spektraler Tripel gefordert wird.

4.2 Kompakte Operatoren und nichtkommutatives Integral

Wir verwenden [23, 7.C und 7.5].

Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ das Ideal der kompakten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$. Für $T \in \mathcal{K}$ ist $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ selbstadjungiert, positiv und kompakt. Nach dem Spektralsatz gibt es eine Nullfolge von Eigenwerten $\mu_i > 0$ von $|T|$, der entsprechende Eigenraum $E_i = \ker(|T| - \mu_i 1)$ ist endlich-dimensional, und es gilt $sp(|T|) = \{\mu_i \ : \ i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Als *singulären Wert* oder *charakteristischen Wert* $s_k(T)$ von T bezeichnet man den k-ten Eigenwert $\mu_k(|T|)$, fallend und mit Vielfachheit angeordnet. Es gilt $s_0(T) = \||T|\|$. Ähnlich zur Definition der ℓ^p-Folgenräume definieren die singulären Werte die *Schatten-Ideale* in $\mathcal{K}$ (und $\mathcal{L}(\mathcal{H})$):

$$\mathcal{L}^p := \Big\{ T \in K \ : \ \|T\|_p := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (s_k(T))^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\} .$$

Speziell ist $\mathcal{L}^2$ die *Hilbert-Schmidt-Klasse*, $\mathcal{L}^1$ die *Spur-Klasse*, und man identifiziert $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{K}$ mit $\| \ \|_\infty = \| \ \|$ (Operator-Norm). Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist $(\mathcal{L}^p, \| \ \|_p)$ ein Banach-Raum.

Für $T \in \mathcal{L}^1$ gilt $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \langle \psi_i, T\psi_i \rangle$ für eine beliebige Orthonormalbasis $\{\psi_i\}$ von $\mathcal{H}$, und $\mathrm{Tr}(T) \leq \mathrm{Tr}(|T|) = \|T\|_1$. Es gilt $\mathrm{Tr}(TS) = \mathrm{Tr}(ST)$ falls $TS, ST \in \mathcal{L}^1$. Für $s_0(T) = \||T|\| = 1$ ist $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^r$ für $p < r$. Es gilt die Höldersche Ungleichung $\mathrm{Tr}(|TS|) \leq \|T\|_p \|S\|_q$ mit $T \in \mathcal{L}^p$, $S \in \mathcal{L}^q$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sie verallgemeinert sich zu $\mathrm{Tr}(|TS|) \leq \|T\|_1 \|S\|$ für $T \in \mathcal{L}^1$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Es zeigt sich, daß die Spurklasse-Operatoren ungeeignet für eine nichtkommutative Verallgemeinerung des Integrals sind und man stattdessen zum Dixmier-Ideal $\mathcal{L}^{1+}$ übergehen muß, mit $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^{1+} \subset \mathcal{L}^p$ für alle $p > 1$. Sei $\sigma_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(T)$ die Partialsumme. Die Dixmier-Klasse kompakter Operatoren T ist durch $\sigma_n(T) = \mathcal{O}(\log n)$ charakterisiert. Man zeigt, daß jede Partialsumme $T \mapsto \sigma_n(T)$ eine Norm auf $\mathcal{K}$ ist, genauer

$$\sigma_n(T) = \sup\{ \|TP_E\|_1 \ : \ P_E \text{ Projektor auf } n\text{-dimensionalen Teilraum } E \subset \mathcal{H} \ \} .$$

Für positive T kann $\|TP_E\|_1$ durch $\mathrm{Tr}(P_E T P_E)$ ersetzt werden. Zunächst ist $s_k(T) = \inf\{ \|T|_{E^\perp}\| \ : \ \dim(E) = k\}$ [23, Lemma 7.32]. Also ist $s_k(T) \geq s_k(S)$ für $T^*T \geq S^*S$. Wähle $S = TP_E$, dann ist $\sigma_n(T) \geq \sum_{k=0}^{n-1} s_k(TP_E) = \|TP_E\|_1$. Andererseits folgt Gleichheit für den von den ersten n Eigenvektoren aufgespannten Unterraum. Wegen $\|(T+S)P_E\|_1 \leq \|TP_E\|_1 + \|SP_E\|_1$ gilt die Dreiecksungleichung, wegen $s_k(T) \leq s_0(T) = \|T\|$ gilt $\sigma_n(T) \leq n\|T\|$.

Wichtig ist eine umgekehrte Einschachtelung für positive Elemente $0 \leq T, S \in \mathcal{K}$:

$$\sigma_n(T+S) \leq \sigma_n(T) + \sigma_n(S) \leq \sigma_{2n}(T+S) ,$$

da $\mathrm{Tr}(P_E T P_E) + \mathrm{Tr}(P_F S P_F) \leq \mathrm{Tr}(P_{E+F} T P_{E+F}) + \mathrm{Tr}(P_{E+F} S P_{E+F}) = \mathrm{Tr}(P_{E+F}(T+S)P_{E+F})$. Damit wird $T \mapsto \frac{1}{\log n}\sigma_n(T)$ im Limes $n \to \infty$ zu einer additiven Abbildung auf einem geeigneten Kegel positiver Elemente von $\mathcal{K}$ und nach linearer Forsetzung auf einem Teilraum von $\mathcal{K}$. Wegen $\sigma_n(UTU^*) = \sigma_n(T)$ wird $T \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sigma_n(T)$ sogar zu einer Spur (jedes $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist Linearkombination von 4 unitären Operatoren). Dazu ist jedoch die Existenz des Limes $n \to \infty$ zu garantieren.

Man definiert das *Dixmier-Ideal* $\mathcal{L}^{1+} \subset \mathcal{K}$ als

$$\mathcal{L}^{1+} := \Big\{ T \in \mathcal{K} \ : \ \|T\|_{1+} := \sup_{n\geq 2} \frac{\sigma_n(T)}{\log n} < \infty \Big\} \ .$$

Ein positiver kompakter Operator $T \in \mathcal{L}^{1+}$ heißt *meßbar*, wenn der Limes

$$⨍ T := \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}$$

existiert (wird noch etwas verallgemeinert). Durch lineare Fortsetzung wird das *nichtkommutative Integral* $⨍$ zu einer Spur auf der Menge der meßbaren $\mathcal{L}^{1+}$-Operatoren. Offenbar gilt $⨍T = 0$ für $T \in \mathcal{L}^1$.

Jedoch gibt auch nicht-meßbare $T \in \mathcal{L}^{1+}$. Man kann auch für diese eine Spur erklären, die *Dixmier-Spur*. Zunächst ist $\frac{\sigma_n(T)}{\log n}$ zu glätten. Man kann $\sigma_n(T)$ linear auf $\sigma_\lambda(T)$ fortsetzen für $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese kann man Cesàro-mitteln,

$$\tau_\lambda(T) = \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\lambda \frac{du}{u} \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \ .$$

Für positive $T, S \in \mathcal{L}^{1+}$ läßt sich zeigen, daß $\tau_\lambda(T+S) - \tau_\lambda(T) - \tau_\lambda(S) = \mathcal{O}(\frac{\log\log\lambda}{\log\lambda})$ für $\lambda \to \infty$. Das sichert die Linearität, folglich die Spur-Eigenschaft. Für festes T liegt die Funktion $(\lambda \mapsto \tau_\lambda(T))$ in der kommutativen C^*-Algebra $C_b([3, \infty[)$. Jeder Zustand ω auf $C_b([3, \infty[)$, der auf der Algebra $C_0([3, \infty[)$ der in ∞ verschwindenden Funktionen Null ist, definiert dann durch $\mathrm{Tr}_\omega(T) := \omega(\tau(\frac{\sigma_n(T)}{\log n}))$ und lineare Fortsetzung eine Spur auf $\mathcal{L}^{1+}$, die auf $\mathcal{L}^1$ verschwindet.

Beispiel 4.3 Es sei $T = \Delta^{-s/2}$ für den Laplace-Operator auf dem p-Torus $\mathbb{T}^p = S^1 \times \cdots \times S^1$. Die Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$ sind $e^{\mathrm{i}(k_1x_1+\cdots+k_px_p)}$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$, das Spektrum ist also $sp(\Delta) = \{\|k\|^2 \ : \ k \in \mathbb{Z}^p\}$. Der Lapace-Operator hat einen endlich-dimensionalen Kern, die konstanten Funktionen. Es wird stillschweigend vereinbart, daß Δ auf dem Kern durch 1 ersetzt wird. Mit dieser Ersetzung ist $T = \Delta^{-s/2}$ kompakt für $s > 0$. Zur Bestimmung von $s_n(T)$ benötigen wir zumindest asymptotisch die Vielfachheit eines Eigenwertes $\|k\|$ von $\Delta^{\frac{1}{2}}$. Bezeichne $\Omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})}$ die Oberfläche der S^{p-1}, also $\frac{\Omega_p}{p}$ das Volumen der p-dimensionalen Einheitsvollkugel, dann ist $s_{\frac{\Omega_p}{p}r^p}(\Delta^{-s/2}) = r^{-s}$ oder $s_n(T) = \big(\frac{np}{\Omega_p}\big)^{-\frac{s}{p}}$. Somit ist

$$\sigma_n(T) = \int_1^n du \, \Big(\frac{\Omega_p}{up}\Big)^{\frac{s}{p}} \ ,$$

also ist $\|T\|_{1+}$ unbeschränkt für $s < p$, gleich 0 für $s > p$, und für $s = p$ gilt

$$\fint \Delta^{-\frac{p}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \int_1^n du\, \frac{\Omega_p}{up} = \frac{\Omega_p}{p} = \frac{\Omega_p}{p(2\pi)^p} \int_{\mathbb{T}^n} d\,\mathrm{vol}\,.$$

Damit haben wir Connes' Spurtheorem für $\mathbb{T}^n$ und konstante Funktionen gezeigt. $\triangleleft$

In vielen Fällen kann das nichtkommutative Integral über ein Residuum berechnet werden. Wenn $T \in \mathcal{L}^s$ für alle $s > 1$ und der Limes $\mathrm{res}_{s=1}(\mathrm{Tr}(T^s)) = \lim_{s\searrow 1}(s-1)\mathrm{Tr}(T^s)$ existiert, dann gilt $\fint T = \mathrm{res}_{s=1}(\mathrm{Tr}(T^s))$. Siehe [23, Lemma 7.19+7.20].

Ist Δ der Laplace-Operator auf einer p-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit X und $f \in C^\infty(X)$, so besagt Connes' Spurtheorem

$$\fint (f\Delta^{-\frac{p}{2}}) = \frac{\Omega_p}{p(2\pi)^p} \int_X dx\; f(x)\,.$$

Typischerweise beweist man das Spurtheorem über das Wodzicki-Residuum für Pseudodifferentialoperatoren. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine recht allgemeine Klasse von Operatoren P auf $C_c^\infty(U) \ni f$ (glatte Funktionen mit kompaktem Träger) gegeben als Integralkern

$$(Pf)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi\; e^{\mathrm{i}\xi x}\, p(x,\xi)\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_U dy\; e^{\mathrm{i}\xi(x-y)}\, p(x,\xi) f(y)\,.$$

Dabei heißt $p(x,\xi)$ das *Symbol* von P, und P heißt Pseudodifferentialoperator der Ordnung d, wenn für das Symbol eine Abschätzung $|(D_x^\beta D_\xi^\alpha p)(x,\xi)| \leq C_{K\alpha\beta}(1+|\xi|^2)^{\frac{d-|\alpha|}{2}}$ gilt für Multiindizes α,β und $x \in K \subset U$ kompakt. Es gibt eine asymptotische Entwicklung $p(x,\xi) \sim \sum_{s\leq d} p_s(x,\xi)$ für solche Symbole, und der führende Anteil $p_d(x,\xi)$ heißt *Hauptsymbol*. Ist $\dim(X) = n$, dann ist das *Wodzicki-Residuum* von P gegeben durch das Integral

$$Wres(P) = \int_{S^{n-1}} d\xi \int_X dx\; p_{-n}(x,\xi)\,.$$

Man zeigt, daß $Wres$ eine Spur ist. Für $P = f\Delta^{-\frac{n}{2}}$ ist p_{-n} das Hauptsymbol, für welches sich $\frac{1}{n(2\pi)^n} Wres(P) = \mathrm{res}_{s=1}\mathrm{Tr}(P^s)$ zeigen läßt. Daraus ergibt sich schließlich das Spurtheorem.

4.3 Hochschild-Homologie

Es sei $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra, $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{A}$-Bimodul, und $C_n(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^{\otimes n}$ ein $(n+1)$-faches Tensorprodukt. Man definiert den Hochschild-Operator b :

$C_n(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to C_{n-1}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ als

$$\begin{aligned} b(m\otimes a_1 \otimes \dots a_n) &:= ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \,. \end{aligned}$$

Setzt man noch $b = 0$ auf $C_0(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, dann rechnet man $b^2 = 0$ nach. Z.B ist

$$b(m\otimes a_1) = ma_1 - a_1 m \,, \quad b(m\otimes a_1 \otimes a_2) = ma_1 \otimes a_2 - m \otimes a_1 a_2 + a_2 m \otimes a_1$$

und dann

$$b^2(m\otimes a_1 \otimes a_2) = (ma_1a_2 - a_2ma_1) - (ma_1a_2 - a_1a_2m) + (a_2ma_1 - a_1a_2m) = 0\,.$$

Somit ist $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{M}),b)$ ein *Kettenkomplex*, und die *Hochschild-Homologie* $HH_*(\mathcal{A},\mathcal{M})$ ist die zugehörige Homologie. Bezeichnet $Z_n(\mathcal{A},\mathcal{M}) \ni c_n$ den Teilraum der Hochschild-n-Zykel $bc_n = 0$, dann ist $HH_n(\mathcal{A},\mathcal{M}) = Z_n(\mathcal{A},\mathcal{M})/bC_{n+1}(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Nach Dualisieren läßt sich die *Hochschild-Kohomologie* definieren für multi-lineare Abbildungen $\phi : \mathcal{A}^{\times n} \to \mathcal{M}$.

Die Hochschild-Homologie ist die einfachste von mehreren nichtkommutativen (Ko-)Homologien; sie enthält bereits viel Struktur. Für die Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ der glatten Funktionen auf eine Mannigfaltigkeit X besagt das Hochschild-Kostant-Rosenberg-Connes-Theorem, daß $HH_*(C^\infty(X),C^\infty(X)) \simeq \Omega^*(C^\infty(X))$ isomorph zur äußeren Algebra über X ist. Durch

$$\varepsilon_n(f_0 \cdot df_1 \wedge \cdots \wedge f_n) := \sum_{\beta\in S_n} \mathrm{sign}(\beta) f_0 \otimes f_{\beta(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\beta(n)}$$

werde die Antisymmetrisierungs-Abbildung $\varepsilon_n : \Omega^n\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$ definiert. Umgekehrt sei $\mu_n : \mathcal{A}^{\otimes(n+1)} \to \Omega^n\mathcal{A}$ definiert durch

$$\mu_n(f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n := f_0 \cdot df_1 \wedge \cdots \wedge f_n \,.$$

Man überprüft $b\circ\epsilon_n = 0$ und $\mu_{n-1} \circ b = 0$, so daß (ϵ,μ) zu Morphismen von Kettenkomplexen weden, wenn man auf $\Omega^n\mathcal{A}$ den Randoperator $\partial = 0$ nimmt. Wegen $\mu_n \circ \epsilon = n!\mathrm{id}$ ist $\epsilon_n : \Omega^n\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$ injektiv, nach Hochschild-Kostant-Rosenberg-Connes sogar ein Isomorphismus. Das bemerkenswerte daran ist, daß die Homologiegruppen $HH_*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ *lokal* sind, d.h. nur die Diagonale von $\mathcal{A}^{\otimes(n+1)} \simeq C^\infty(X\times\cdots\times X)$ trägt zur Homologie bei.

Nun wieder zur Definition 4.1 spektraler Tripel, wobei wir die Kommutativität der Algebra nicht fordern. Mit der Darstellung $\pi_\mathcal{D}$ von $\mathcal{A}^{\otimes(p+1)} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ im

Orientierungsaxiom 4) eng verwandt ist das folgende $(p+1)$-lineare Funktional auf $\mathcal{A}^{\otimes(p+1)}$:

$$\phi_\omega(a_0, a_1, \dots, a_p) = \mathrm{Tr}_\omega(\gamma a_0[\mathcal{D}, a_1] \cdots [\mathcal{D}, a_p]|\mathcal{D}|^{-p}) .$$

Da $|\mathcal{D}|^{-p}$ im Dixmier-Ideal $\mathcal{L}^{1+}$ liegt und $f_0, \gamma, [\mathcal{D}, f_i] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind, ist die Dixmier-Spur für einen Zustand ω korrekt definiert. Aus der Regularität 3) folgt, daß ϕ_ω ein *Hochschild-p-Kozykel* ist, $b^*\phi_\omega = 0$. Für $p = 1$ haben wir z.B.

$$\begin{aligned}
&(b^*\phi_\omega)(a_0, a_1, a_2) = \phi_\omega(a_0 a_1, a_2) - \phi_\omega(a_0, a_1 a_2) + \phi_\omega(a_2 a_0, a_1) \\
&= \mathrm{Tr}_\omega\big(\gamma\big(a_0 a_1[\mathcal{D}, a_2] - a_0[\mathcal{D}, a_1 a_2] + a_2 a_0[\mathcal{D}, a_1]\big)|\mathcal{D}|^{-p}\big) \\
&= -\mathrm{Tr}_\omega\big(\gamma\big[a_0[\mathcal{D}, a_1], a_2\big]|\mathcal{D}|^{-p}\big) = -\mathrm{Tr}_\omega\big(\gamma a_0[\mathcal{D}, a_1][a_2, |\mathcal{D}|^{-p}]\big) .
\end{aligned}$$

Analog findet man für beliebiges p einen Kommutator $[a, |\mathcal{D}|^{-p}]$ unter der Dixmier-Spur. Nun ist

$$\big[a, |\mathcal{D}|^{-p}\big] = |\mathcal{D}|^{-p}\big[|\mathcal{D}|^p, a\big]|\mathcal{D}|^{-p}] = \sum_{i=1}^{p} |\mathcal{D}|^{-i}\big[|\mathcal{D}|, a\big]|\mathcal{D}|^{-(p+1-i)} .$$

Mit $T = |\mathcal{D}|^{-p} \in \mathcal{L}^s$ für alle $s > 1$, der Regularität $\delta a = [|\mathcal{D}|, a] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\Big\| |\mathcal{D}|^{-i}\big[|\mathcal{D}|, a\big]|\mathcal{D}|^{-(p+1-i)}\Big\|_1 \leq \big\|T^{\frac{i}{p}}\big\|_{\frac{2p}{2i-1}} \big\|\delta a\big\|_\infty \big\|T^{\frac{p+1-i}{p}}\big\|_{\frac{2p}{2p-2i+1}} < \infty ,$$

d.h. $[a, |\mathcal{D}|^{-p}]$ ist Spurklasse. Also verschwindet die Dixmier-Spur, und ϕ_ω ist ein Hochschild-Kozykel.

In π_ω treten je p Operatoren $\mathcal{D} = F|\mathcal{D}|$ und $|\mathcal{D}|^{-1}$ auf. Es stellt sich die Frage, ob man die $|\mathcal{D}|$ unter Verwendung der Regularität für $\delta^m a$, $\delta^m[\mathcal{D}, a]$ derart hindurchkommutieren kann, daß der Kozykel nur von F abhängt. Folgende Definition ist sinnvoll:

$$\tau_n^F(a_0, a_1, \dots, a_n) := \mathrm{Tr}(\gamma F[F, a_0] \cdots [F, a_n]) .$$

Dabei ist $\gamma = 1$ für p ungerade und $\gamma F = -F\gamma$ für p gerade. Wir zeigen, daß aus $|\mathcal{D}|^{-p} \in \mathcal{L}^{1+}$ folgt $[F, a] \in \mathcal{L}^q$ für alle $q > p$. Nach der Hölderschen Ungleichung existiert dann die Spur in τ_n^F für $n + 1 > p$. Tatsächlich gilt

$$[F, a] = [\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-1}, a] = \mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-1}\big[a, |\mathcal{D}|\big]|\mathcal{D}|^{-1} + [\mathcal{D}, a]|\mathcal{D}|^{-1} .$$

Die Operatoren $\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-1} = F$, $[\mathcal{D}, a]$ und $[|\mathcal{D}|, a]$ sind beschränkt, und $|\mathcal{D}|^{-1} \in \mathcal{L}^q$ für $q > p$. Kommutiert man *formal* das F in $[F, a_0]$ über die Spur-Eigenschaft und mit $F[F, a] = -[F, a]F$ auf die andere Seite, so entsteht "$2\mathrm{Tr}(\gamma a_0[F, a_1] \cdots [F, a_n])$". Jedoch ist das Argument für $n \leq p$ *kein* Spurklasse-Operator.

Mit gewisser Vorsicht bezüglich der Existenz der Spuren zeigt die übliche Rechnung, daß τ_F^p ein Hochschild-p-Kozykel ist. Sei z.B. $p = 1$, dann ist $\gamma = 1$ und

$$\begin{aligned}&(b^*\tau_1^F)(a_0, a_1, a_2)\\ &= \mathrm{Tr}\Big(F\big(a_0[F, a_1][F, a_2] - [F, a_0][F, a_1]a_2 + a_2[F, a_0][F, a_1] + [F, a_2]a_0[F, a_1]\big)\Big) .\end{aligned}$$

Da mindestens zwei Kommutatoren $[F, a]$ auftauchen, gilt Zyklizität unter der Spur. Unter Verwendung von $F[F, a] = -[F, a]F$ findet man $b^*\tau_1^F = 0$.

Der Kozykel τ_p^F hat eine weitere wichtige Eigenschaft, er ist *zyklisch*:

$$\tau_F(a_0, a_1, \dots, a_p) = (-1)^p \tau_F(a_p, a_1, \dots, a_{p-1}) .$$

Das folgt aus $\gamma[F, a_p] + (-1)^p[F, a_p]\gamma = 0$ und $F[F, a_p] = -[F, a_p]F$. Der Hochschild-Operator b^* bildet zyklische Koketten auf zyklische Koketten ab. Die Kohomologie des entsprechenden Kokettenkomplexes heißt die *zyklische Kohomologie* $HC^*(\mathcal{A})$, somit ist τ_p^F ein zyklischer Kozykel.

Ein nicht-triviales Theorem von Connes besagt:

Theorem 4.4 (Connes, 1987) *Sei* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ *ein spektrales Tripel,* $\mathcal{A}$ *nicht notwendig kommutativ, und es gelte 1) Dimension und 3) Regularität. Dann sind* τ_p^F *und* ϕ_ω *Hochschild-kohomolog.*

Der Beweis findet sich erstmals in [23, 10.4]. Die entscheidenden Schritte sind Lemma 10.25, wo die regularisierte Spur τ_p^F mit dem Kommutator-Trick $F[F, a_0]$ als Limes $t \to 0$ einer t-abhängigen Regularisierung ψ_t ersetzt wird. Auf $t \to \psi_t$ wird ein beliebiger Zustand ω angewendet, und Proposition 10.28 stellt eine Verbindung zur Dixmier-Spur her.

Somit ist das Bild eines Hochschild-Zykels $c = \sum_\alpha a_0^\alpha \otimes a_1^\alpha \otimes \dots a_p^\alpha$, mit $bc = 0$, unter ϕ_ω unabhängig vom Zustand ω. Falls sich der Graduierungsoperator γ schreiben läßt als $\gamma = \pi_{\mathcal{D}}(c)$ mit $bc = 0$, dann ist

$$\mathrm{Tr}_\omega(|\mathcal{D}|^{-p}) = \sum_\alpha \phi_\omega(a_0^\alpha, a_1^\alpha, \dots, a_p^\alpha)$$

unabhängig von ω, d.h. $|\mathcal{D}|^{-p}$ ist meßbar. Ist $\mathcal{A} \ni f$ kommutativ, dann ist mit c auch fc ein Hochschild-Zykel, so daß sogar $⨍ f|\mathcal{D}|^{-p} := \mathrm{Tr}_\omega(f|\mathcal{D}|^{-p})$ ein von ω unabhängiges nichtkommutatives Integral definiert. Somit sichern 1), 3) und 4) in Definition 4.1, daß 5) wohldefiniert ist.

Umgekehrt liefert ϕ_ω einen *lokalen Repräsentanten* der Hochschild-Kohomologieklasse von τ_p^F. Connes und Moscovici konnten in [10] unter Zusatzannahmen einen lokalen Repräsentanten sogar für die zyklische Kohomologieklasse von τ_p^F finden.

5 Konstruktion der Karten

5.1 Charakterisierung der Algebra

Wir charakterisieren die Algebra $\mathcal{A}$ in Definition 4.1. Der Abschluß von $\mathcal{A}$ in der Norm-Topologie definiert eine unitale C^*-Algebra A, und der Abschluß in der starken oder schwachen Operatortopologie definiert eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}''$. Damit sind auch A und $\mathcal{A}''$ kommutativ. Nach Gelfand-Naimark ist $X = \mathit{Spec}(A)$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Wir werden später sehen, daß auch direkt $X = \mathit{Spec}(\mathcal{A})$ gilt. Das Rekonstruktionstheorem 4.2 behauptet, daß X mit einem Atlas lokaler Karten ausgestattet ist:

Definition 5.1 Eine differenzierbare kompakte p-dimensionale Mannigfaltigkeit ist gegeben durch einen kompakten Hausdorff-Raum X zusammen mit einem System (U_α, s_α) lokaler Karten, so daß gilt:

- Die U_α sind offen in X und $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.
- Die Abbildungen $s_\alpha : U_\alpha \to s_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^p$ sind Homöomorphismen.
- Der Kartenwechsel $s_\alpha \circ s_\beta^{-1} : s_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to s_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist glatt.

Wir werden zeigen, daß der Hochschild-Zykel c in 4) Kandidaten für lokale Karten (U_α, s_α) enthält. Der Beweis, daß die s_α Homöomorphismen sind, unterteilt sich in mehrere Schritte. Im Schritt a) wird gezeigt, daß s_α stetig und offen ist. Schritt c) zeigt die Injektivität. Dazu werden Eigenschaften des gemeinsamen Spektralmaßes benötigt, das in Schritt b) als Lebesgue-Maß identifiziert wird.

Ein wichtiger Schritt im Beweis des Rekonstruktionstheorems 4.2 ist Lemma 2.1 in [15], welches die kommutative Algebra $\mathcal{A}$ als reguläre Elemente ihres schwachen Abschlusses $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ charakterisiert.

Satz 5.2 ([15, Lemma 2.1]) *Für ein $T \in \mathcal{A}''$ sind äquivalent:*

i) $T \in \mathcal{A}$

ii) $[\mathcal{D}, T]$ *ist beschränkt und* T, $[\mathcal{D}, T] \in \mathrm{dom}(\delta^m)$

iii) $T \in \mathrm{dom}(\delta^m)$

iv) $T\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$

Beweis. i)⇒ii) ist die Regularität 3), ii)⇒iii) ist klar, und iii)⇒iv) ist die Leibniz-Regel für $|\mathcal{D}|^m T\xi$.

iv)⇒i). Nach iv) und Kommutativität von $\mathcal{A}''$ ist $T \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$ ein Endomorphismus des endlich-erzeugten projektiven $\mathcal{A}$-Moduls $\mathcal{H}_\infty = e\mathcal{A}^n$. Da $\mathcal{A}$ unital ist, gilt $T = (a_{kl}) = eTe$ mit $(a_{kl}) \in M_n(\mathcal{A})$: Sei $\xi_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t \in \mathcal{A}^n$ der Vektor mit $1 \in \mathcal{A}$ in der k-ten Komponente, sonst 0, dann ist

$$\eta_k = e\xi_k = \begin{pmatrix} e_{1k} \\ \vdots \\ e_{nk} \end{pmatrix} \in e\mathcal{A}^n \;, \qquad e_{kl} \in \mathcal{A} \;,$$

und beliebiges $\xi \in \mathcal{H}_\infty$ läßt sich schreiben als $\xi = \sum_{k=1}^n \eta_k a_k$ für $a_k \in \mathcal{A}$. Damit ist $(\eta_k | T\eta_l) = \sum_{r,s=1}^n e_{kr} a_{rs} e_{sl} = a_{kl} \in \mathcal{A}$.

Das nichtkommutative Integral definiert durch

$$\lambda(f) := ⨍ f|\mathcal{D}|^{-p} \;, \qquad f \in C(X) = A \;,$$

ein positives Maß λ auf X. Zu beachten ist aber, daß der zyklische Kozykel $\tau_F^p(f\gamma)$ nicht definiert ist, da für $f \in A$ nicht regulär ist. Ist (f_k) Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ mit $f_k \to f$ in der Norm-Topologie, dann ist wegen $\mathrm{Tr}_\omega(RS) \leq \|R\| \mathrm{Tr}_\omega(S)$ für $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $S \in \mathcal{L}^{1+}$ auch $⨍ f_k|\mathcal{D}|^{-p}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, welche $\lambda(f)$ unabhängig von ω definiert.

Der Projektor e definiert durch $\mathcal{E} = eA^n$ einen endlich erzeugten projektiven A-Modul. Nach dem Serre-Swan-Theorem gibt es ein komplexes lokal-triviales Vektorbündel $S \xrightarrow{p} X$ über X, so daß $\mathcal{E} = \Gamma(X, S)$. Nach Axiom 5) gilt für das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \lambda((\xi|\eta)) \;, \qquad \xi, \eta \in e\mathcal{A}^n \;.$$

Somit ist die Vervollständigung von $e\mathcal{A}^n$ zu $\mathcal{H}$ gegeben durch die Vervollständigung der stetigen Funktionen bezüglich λ (absolute Stetigkeit). Also ist $\mathcal{H} = e(L^2(X, \lambda))^n = L^2(X, S, \lambda)$, und die Wirkung von $f \in \mathcal{A}''$ auf $\mathcal{H}$ wird als diagonale Multiplikation mit $f \in L^\infty(X, \lambda)$ identifiziert. Somit ist $T = e\,\mathrm{diag}(f, \dots, f)$ für ein $f \in L^\infty(X, \lambda)$. Andererseits war $T = (a_{kl})$ mit $a_{kl} \in \mathcal{A}$, und daraus läßt sich $f \in \mathcal{A}$ zeigen:

Sei $T = (a_{ij}) \in \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{H}_\infty)$, mit $a_{ij} \in \mathcal{A}$, dann definieren wir $\mathrm{tr}(T) = \sum_{k=1}^n a_{kk} \in \mathcal{A}$. Nach Serre-Swan-Konstruktion ist $\mathrm{tr}(e) \in \mathcal{A} \subset A$ die stetige Funktion, deren Wert in $\chi \in X$ die Dimension der Faser $S_\chi = p^{-1}(\chi)$ ist. Folglich ist $\chi(\mathrm{Tr}(e)) \in \{0, 1, \dots, n\}$. Die Dimension der Fasern ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von X. Sei $p_j = p_j^2 \in C(X)$ die Projektion auf die Menge der Zusammenhangskomponenten X_j von X mit $\dim(S_\chi) = j$. Dann ist $\sum_{j=0}^n p_j = 1$ und $\mathrm{tr}(e) = \sum_{j=1}^n j p_j \in \mathcal{A}$. Tatsächlich ist $p_j \in \mathcal{A}$, denn es gilt

$$p_k = \prod_{j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{\mathrm{tr}(e) - j1}{k - j} \in \mathcal{A} \;.$$

Z.B. ist für $n = 2$ und $k = 1$ mit $\mathrm{tr}(e) = p_1 + 2p_2$ und $1 = p_0 + p_1 + p_2$

$$\frac{(p_1{+}2p_2) - 0(p_0{+}p_1{+}p_2)}{1 - 0} \cdot \frac{(p_1{+}2p_2) - 2(p_0{+}p_1{+}p_2)}{1 - 2} = (p_1 + 2p_2)(p_1 + 2p_0) = p_1 \;.$$

Wir schließen $j = 0$ aus: Denn $p_0 \in A$ wirkt als 0 auf lokalen Schnitte von S über X_j mit $j > 0$, und auf lokalen Schnitten über X_0 wirkt jede stetige Funktion als 0. Nach λ-Abschluß wirkt p_0 dann als 0 auf $\mathcal{H}$, also ist $p_0 = 0 \in \mathcal{A}$ und deshalb bereits $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

Zurück zu $T = (a_{kl}) = e\,\mathrm{diag}(f, \dots, f) \in M_n(\mathcal{A})$, mit $f \in \mathcal{A}''$, dann ist

$$\mathcal{A} \ni \sum_{k=1}^n a_{kk} \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{j} = f\mathrm{tr}(e) \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{j} = f \sum_{k=1}^n k p_k \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{j} = f \sum_{j=1}^n p_j = f \; .$$

Damit ist $f \in \mathcal{A}$. □

Als nächstes wird gezeigt, daß $\mathcal{A}$ eine Fréchet-prä-C^*-Algebra ist. Für $a \in \mathcal{A}$ definiert man

$$\rho_k(f) = \begin{pmatrix} a & \delta(a) & \dots & \delta^k(a)/k! \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & \delta(a) \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} .$$

Dann gilt $\rho_k(ab) = \rho_k(a)\rho_k(b)$, so daß die $(p_k)_{k=1,2,\dots}$ mit $p_k(a) := \|\rho_k(a)\|$ eine Familie von Halbnormen auf $\mathcal{A}$ bilden, durch welche $\mathcal{A}$ zu einer lokal-konvexen Algebra wird, $p_k(ab) \le p_k(a)p_k(b)$.

Satz 5.3 *Die Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Fréchet-Algebra (d.h. vollständig) bezüglich der durch (p_k) definierten Topologie.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n \in \mathcal{A}$, eine Cauchy-Folge bezüglich jeder Halbnorm p_k, insbesondere bezüglich p_0. Damit ist (a_n) norm-konvergent gegen ein $T \in A \subset \mathcal{A}''$. Wenn wir zeigen können $T \in \mathrm{dom}(\delta^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so folgt $T \in \mathcal{A}$ nach Satz 5.2.

Der Operator δ ist abgeschlossen (Lemma 5.4), also ist $T \in \mathrm{dom}(\delta)$, und $\delta(a_n)$ ist norm-konvergent gegen δT. Nach Induktion ist $T \in \mathrm{dom}(\delta^m)$ mit $\delta^m T = \| \, \|\text{-}\lim_{n\to\infty} \delta^m a_n$. Also ist $T \in \mathcal{A}$, und a_n konvergiert gegen T in jeder der p_k-Halbnormen. Somit ist $\mathcal{A}$ Fréchet. □

Lemma 5.4 *Der unbeschränkte Operator δ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $T_n \in \mathrm{dom}(\delta)$ mit $T_n \to T$ und $\delta T_n \to S$, jeweils in der Norm-Topologie, dann ist zu zeigen $T \in \mathrm{dom}(\delta)$ und $\delta T = S$. Sei $\xi \in \mathrm{dom}(|D|) \subset \mathcal{H}$, dann ist $T_n\xi$ norm-konvergent gegen $T\xi$, und $|\mathcal{D}|T_n\xi = (\delta T_n)\xi + T_n|\mathcal{D}|\xi$ ist norm-konvergent gegen $S\xi + T|\mathcal{D}|\xi$. Da $|\mathcal{D}|$ abgeschlossen, ist $T\xi \in \mathrm{dom}(|D|)$, und folglich ist $(\delta T_n)\xi$ norm-konvergent gegen $|\mathcal{D}|T\xi - T|\mathcal{D}|\xi$. Also ist $T \in \mathrm{dom}(\delta)$, und (δT_n) konvergiert in der starken Operator-Topologie gegen δT und in der Norm-Topologie gegen S. Also ist $(\delta T - S)\xi = 0$ für alle $\xi \in \mathrm{dom}(|D|)$, und schließlich $\delta T = S$. □

Satz 5.3 und Lemma 5.4 sind der Inhalt von [15, Proposition 2.2], zusammen mit der Stetigkeit der Halbnormen $p'_k(a) := p_k([\mathcal{D}, a])$. Die Vollständigkeit bei Einschluß von p'_k ergibt sich wie zuvor, die Stetigkeit folgt dann aus dem Satz von der offenen Abbildung für $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{p_k,p_k} \to \mathcal{A}_{p_k}$.

Beispiel 5.5 Ist X eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand, dann ist die Algebra $C^\infty(X)$ der glatten Funktionen auf X eine Fréchet-Algebra mit $p_k(f) = \sup_{x\in X,|\alpha|\leq k} \|(\partial^\alpha f)(x)\|$. Die entsprechende Topologie ist die der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen.

Wir können nun zeigen, daß $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter dem holomorphen Funktionalkalkül ist, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine prä-C^*-Algebra. Damit ist gemeint, daß wenn $a \in \mathcal{A} \subset A$ ist und f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung des Spektrums $sp(a)$ ist (betrachtet von der C^*-Algebra A aus), daß gilt

$$f(a) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_c dz \frac{f(z)}{z1 - a} \in \mathcal{A}$$

für eine $sp(a)$ einfach umlaufende Kurve c. Wegen $z \notin sp(a)$ ist $z1-a$ invertierbar in A, also $(z1 - a)^{-1} \in \mathcal{A}''$. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{z^{k+1}} a^k \in \mathcal{A}$ konvergiert gegen $(z1 - a)^{-1} \in A$ in der Normtopologie. Da δ abgeschlossen ist, ist auch $(z1 - a)^{-1} \in \mathrm{dom}(\delta)$ und analog $(z1 - a)^{-1} \in \mathrm{dom}(\delta^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Somit gilt $(z1 - a)^{-1} \in \mathcal{A}$ nach Satz 5.2. In Fréchet-Räumen existiert das Riemann-Integral [25]: Das Integral $f(a)$ kann als Grenzwert Riemannscher Summen in $\mathcal{A}$ aufgefaßt werden. Die Summe konvergiert in A, und der Grenzwert liegt in $\mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich der (p_k) ist. Somit ist $\mathcal{A}$ eine prä-C^*-Algebra. Nach einem Resultat von Bost haben A und $\mathcal{A}$ die gleiche K-Theorie.

Nach Rennie erlaubt $\mathcal{A}$ einen C^∞-Funktionalkalkül. Das bedeutet: Ist $a = a^* \in \mathcal{A}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger, welcher das Spektrum $sp(a) \subset \mathbb{R}$ enthält, dann ist

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} ds\, \hat{f}(s) \exp(\mathrm{i}as) \in \mathcal{A}\,.$$

Dabei ist $\hat{f}(s)$ die Fourier-Transformierte und $s \mapsto \exp(\mathrm{i}as)$ eine einparametrige unitäre Gruppe.

Wir können nun zeigen (siehe [51]), daß $Spec(\mathcal{A}) = Spec(A) = X$ gilt. Wir hatten gezeigt: Ist $a \in \mathcal{A}$ in A invertierbar, dann ist $a^{-1} \in \mathcal{A}$. Insbesondere hat $a \in \mathcal{A} \subset A$ das gleiche Spektrum in A und $\mathcal{A}$. Jeder Charakter auf A definiert automatisch einen Charakter auf $\mathcal{A}$, d.h. $Spec(A) \subset Spec(\mathcal{A})$. Sei nun $\chi \in Spec(\mathcal{A})$ ein beliebiger nichtverschwindender Algebrenhomomorphismus $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Sei $a \in \mathcal{A}$ und $\lambda \notin sp(a)$, dann ist $(a - \lambda 1)b = 1$ für ein $b \in \mathcal{A}$, also $(\chi(a) - \lambda)\chi(b) = 1$. Damit gilt $\lambda \notin sp(a) \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq \chi(a)$, also $\chi(a) \in$

$sp(a)$ für beliebige $\chi \in Spec(\mathcal{A})$. Somit ist $|\chi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$, wobei $r(a)$ der Spektralradius war, so daß χ wegen der Stetigkeit sich zu einem Charakter auf A fortsetzt. Also ist $Spec(\mathcal{A}) = Spec(A) = X$ gezeigt.

5.2 Exponentierbare Derivationen

Wir beginnen nun mit der Konstruktion der Karten für Umgebungen eines Charakters $\chi \in X = Spec(\mathcal{A})$. Es wird eine technische Voraussetzung benötigt: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen auf der Fréchet-prä-C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Der Satz von Picard-Lindelöf gilt in Fréchet-Räumen im allgemeinen *nicht*. Connes beweist, daß er für spezielle Derivationen, die sich aus $a \mapsto [\mathcal{D}, a]$ ergeben, dennoch gilt. Wir werden das später kurz diskutieren. Zunächst werden wir Existenz und Eindeutigkeit einfach annehmen.

Annahme 5.6 *Sei δ_0 eine stetige $*$-Derivation auf der Fréchet-prä-C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine eindeutige stetig von $(t, a) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ abhängige Lösung der Differentialgleichung*

$$\partial_t y(t, a) = \delta_0(y(t, a)) , \qquad y(0, a) = a .$$

Einige Bemerkungen. Eine $*$-Derivation δ_0 erfüllt $\delta_0(ab) = (\delta_0 a)b + a(\delta_0 b)$ und $\delta_0(a^*) = (\delta_0(a))^*$. Differentiation in Fréchet-Räumen ist gerade nicht durch die Fréchet-Ableitung (entspricht dem totalen Differential) gegeben, sondern durch die Gâteau-Ableitung (entspricht der Richtungsableitung). Eine Abbildung $y : F \to G$ zwischen Fréchet-Ableitung ist von C^1-Klasse, wenn die Richtungsableitung

$$(Df)(x, h) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(f(x + \epsilon h) - f(x)) , \quad x, h \in F ,$$

existiert und gemeinsam stetig in $(x, h) \in F \times F$ ist. Dabei ist Stetigkeit bezüglich der (p_k) definiert und somit verschieden von Stetigkeit in Banach-Räumen. Siehe [25]. Damit ist $Df : F \times F \to G$ wieder eine Abbildung zwischen Fréchet-Räumen, so daß sich induktiv höhere Ableitungen $(Df)(x, h_1, \ldots, h_k)$ und entsprechende Differenzierbarkeitsklassen definieren lassen.

Satz 5.7 ([15, Proposition 3.2]) *Unter der Annahme 5.6 gilt für $a, b \in \mathcal{A}$ und $t, s \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:*

i) $y(t, ab) = y(t, a)y(t, b)$

ii) $y(t, a^*) = (y(t, a))^*$

iii) $y(t, \lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1 y(t, a) + \lambda_2 y(t, b)$

iv) $y(t + s, a) = y(t, y(s, a))$

v) $y(t, \delta_0(a)) = \delta_0(y(t, a))$

Außerdem ist $y(t,a)$ eine C^∞-Funktion von (t,a) mit n-ter Richtungsableitung gegeben durch

$$(D^n y)(t,a;s_1,h_1;\ldots;s_n,h_n) = y\Big(t, s_1\ldots s_n\delta_0^n(a) + \sum_{i=1}^n s_1\cdots s_{i-1}s_{i+1}\cdots s_n\delta_0^{n-1}(h_i)\Big) .$$

Beweis. i)-iii) folgen aus der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung und bedeuten, daß δ_0 über $t \mapsto y(t,\ .\ )$ eine einparametrige Familie von Algebrenhomomorphismen induziert. Z.B. gilt in i)

$$\begin{aligned}
\partial_t\big(y(t,a)y(t,b)\big) &= \big(\partial_t(y(t,a)\big)y(t,b) + y(t,a)\big(\partial_t y(t,b)\big) \\
&= \big(\delta_0(y(t,a)\big)y(t,b) + y(t,a)\big(\delta_0 y(t,b)\big) = \delta_0\big(y(t,a)y(t,b)\big) , \\
y(0,ab) &= ab = y(0,a)y(0,b) ,
\end{aligned}$$

also $y(t,ab) = y(t,a)y(t,b)$. Analog ergibt sich iv) bezüglich ∂_t und Anfangswert bei $t=0$. Damit betrachten wir v):

$$\begin{aligned}
\delta_0(y(t,a)) = \partial_t y(t,a) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t+\epsilon,a)-y(t,a)\big) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t,y(\epsilon,a))-y(t,a)\big) \\
&\overset{(iii)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} y\Big(t,\frac{1}{\epsilon}(y(\epsilon,a)-a)\Big) = y(t,\partial_t y(0,a)) = y(t,\delta_0 a) .
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Stetigkeit.

Zur letzten Aussage betrachten wir

$$\begin{aligned}
(Dy)(t,a;s,h) &:= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t+\epsilon s, a+\epsilon h) - y(t,a)\big) \\
&\overset{(iii)}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t+\epsilon s,a) + \epsilon y(t+\epsilon s,h) - y(t,a)\big) \\
&= s\delta_0(y(t,a)) + y(t,h) \overset{(iii,v)}{=} y(t, s\delta_0 a + h) . \qquad (*)
\end{aligned}$$

In zweiter Ordnung gilt

$$\begin{aligned}
&(D^2 y)(t,a;s_1,h_1;s_2,h_2) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(Dy(t+\epsilon s_2, a+\epsilon h_2; s_1,h_1) - Dy(t,a;s_1,h_1)\big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t+\epsilon s_2, s_1\delta_0(a+\epsilon h_2)+h_1) - y(t,s_1\delta a + h_1)\big) \\
&= y(t,s_1\delta_0 h_2) + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big(y(t+\epsilon s_2, s_1(\delta_0 a)+h_1) - y(t,s_1\delta a+h_1)\big) \\
&= y(t,s_1\delta_0 h_2) + s_2\delta_0 y(t,s_1(\delta_0 a)+h_1) ,
\end{aligned}$$

und schließlich

$$(D^n y)(t,a;s_1,h_1;\ldots;s_n,h_n) = y\Big(t, \prod_{j=1}^n s_j\delta_0^n a + \delta_0^{n-1}(\sum_{i=1}^n h_i\prod_{j\neq i} s_j)\Big) . \qquad \square$$

Seien nun p Derivationen $\delta_1, \ldots, \delta_p$ gegeben, für die jeweils die Annahme 5.6 zutreffe. Dann definiert jede Derivation δ_i eine einparametrige Gruppe $F_t^j \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ als eindeutige Lösung von $\partial_t\big(F_t^j(a)\big) = \delta_j\big(F_t^j(a)\big)$. Sei $\chi \in Spec(\mathcal{A})$ ein Charakter, dann ist

$$\mathbb{R}^p \ni (t_1, \ldots, t_p) \mapsto h_\chi := \chi \circ F_{t_1}^1 \circ \cdots \circ F_{t_p}^p \in Spec(\mathcal{A})$$

wieder ein Charakter. Z.B. ist für $p = 2$

$$\begin{aligned} F_{t_1}^1\Big(F_{t_2}^2(ab)\Big) &= F_{t_1}^1\Big(\big(F_{t_2}^2(a)\big) \cdot \big(F_{t_2}^2(b)\big)\Big) \\ &= F_{t_1}^1\big(F_{t_2}^2(a)\big) \cdot F_{t_1}^1\big(F_{t_2}^2(b)\big) \;. \end{aligned}$$

Ist $a = a^*$, dann ist $h_\chi(a) \in \mathbb{R}$ nach Satz 5.7.ii). Damit definiert ein p-Tupel $(a^1, \ldots, a^p)$ selbstadjungierter Elemente $a^k = (a^k)^* \in \mathcal{A}$ eine Abbildung $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^p) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ mit

$$\phi^k(t_1, \ldots, t_p) := h_\chi(a^k) = \chi \circ F_{t_1}^1 \circ \cdots \circ F_{t_p}^p(a^k) \;.$$

Für feste Wahl von a^k ist die Abbildung $\mathbb{R}^p \ni (t_1, \ldots, t_p) \mapsto F_{t_1}^1 \circ \cdots \circ F_{t_p}^p(a^k) \in \mathcal{A}$ glatt. Der Charakter $\chi : \mathcal{A}_{sa} \to \mathbb{R}$ ist linear und stetig, also ebenfalls glatt. Damit ist $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine glatte Abbildung. Die Jacobi-Matrix in 0 hat die Komponenten

$$\begin{aligned} (\partial_j \phi^k)(0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\big(\phi^k(0, \ldots, \epsilon, \ldots, 0) - \phi^k(0, \ldots, 0)\big) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\big(\chi \circ F_\epsilon^j(a^k) - \chi(a^k)\big) = \chi(\delta_j a^k) \end{aligned}$$

Wenn wir die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix voraussetzen, dann liefert der Satz über implizite Funktionen:

Satz 5.8 ([15, Lemma 3.4 und 3.3]) *Gegeben seien p selbstadjungierte Elemente $(a^1, \ldots, a^p)$ von $\mathcal{A}$, ein Charakter $\chi \in Spec(\mathcal{A})$ und p Derivationen $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$, für die die Annahme 5.6 zutrifft. Sei $\det \chi(\delta_j a^k) \neq 0$. Dann gilt:*

i) *Es existiert eine offene Umgebung $Z \subset X = Spec(\mathcal{A})$ von χ und eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^p$ von 0, so daß für beliebiges $\kappa \in Z$ die Abbildung*

$$W \ni (t_1, \ldots, t_p) \mapsto \psi_\kappa(t_1, \ldots, t_p) := \big((\kappa \circ F_{t_1}^1 \circ \cdots \circ F_{t_p}^p)(a^k)\big)_{k=1,\ldots,p} \in \mathbb{R}^p$$

ein stetig von κ abhängiger Diffeomorphismus ist zwischen W und einer Umgebung $Y_\kappa := \psi_\kappa(W) \subset \mathbb{R}^p$ von $(\kappa(a^1), \ldots, \kappa(a^p))$.

ii) *Das Bild einer beliebigen offenen Umgebung $U \subset X$ von χ unter $U \ni \kappa \mapsto (\kappa(a^1), \ldots, \kappa(a^p)) \in \mathbb{R}^p$ enthält eine offene Umgebung von $(\chi(a^1), \ldots, \chi(a^p))$.*

Beweis. i) Für festes $\kappa \in X$ ist $\mathbb{R}^p \ni (t_1,\dots,t_p) \mapsto \psi_\kappa(t_1,\dots,t_p) \in \mathbb{R}^p$ glatt, und für die Jacobi-Matrix in 0 gilt $(\partial_j\psi_\kappa^k)(0) = \kappa(\delta_j a^k)$. Seien $t,x \in \mathbb{R}^p$. Der Satz über implizite Funktionen führt die Bestimmung der Auflösung von $F_\kappa(x,t) = x-\psi_\kappa(t) = 0$ nach t zurück auf das Fixpunktproblem $G_\kappa(x,t) = t$ mit $G_\kappa(x,t) = t+((D\psi_\kappa)(0))^{-1}\cdot(x-\psi_\kappa(t))$. Dann ist die Jacobi-Matrix bezüglich der 2. Komponente gegeben durch $(\frac{\partial G_\kappa}{\partial t})(t) = E_p-((D\psi_\kappa)(0))^{-1}(D\psi_\kappa)(t)$. Wegen der Stetigkeit von $(D\psi_\kappa)(t)$ in (t,κ) gibt es eine offene Umgebung $Z \subset X = Spec(\mathcal{A})$ von χ und eine offene Umgebung $W_0 \subset \mathbb{R}^p$ von 0, so daß $\|(\frac{\partial G_\kappa}{\partial t})(t)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in W_0$ und $\kappa \in Z$. In der weiteren Konstruktion wird $G_\kappa(x,\ .\ )$ eine Kontraktion auf einer abgeschlossenen Kugel $K \subset W_0$, und zwar gleichmäßig in $\kappa \in Z$ und x aus einer Umgebung von $(\kappa(a^1),\dots,\kappa(a^p))$, und der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Injektivität von ψ_κ. Nach Verkleinerung der Umgebungen beweist man, daß $\psi_\kappa : W \to Y_\kappa$ ein stetig von $\kappa \in Z$ abhängender Diffeomorphismus ist, mit $W \subset K \subset W_0$ unabhängig von κ.

ii) Die Abbildung $h_\chi : (t_1,\dots,t_p) \mapsto \chi \circ F^1_{t_1} \circ \dots F^p_{t_p} : \mathbb{R}^n \to X$ ist stetig. Also ist $h_\chi^{-1}(U) \ni 0$ offen und nichtleer in $\mathbb{R}^p$, und $\tilde{W} := h_\chi^{-1}(U) \cap W \ni 0$ ist eine offene Umgebung von 0. Diese Umgebung wird durch ψ_χ diffeomorph auf eine offene Umgebung $\tilde{Y} \subset Y$ von $(\chi(a^1),\dots,\chi(a^p))$ abgebildet. Nach Konstruktion ist $\tilde{Y}$ das Bild von $U \cap h_\chi(W)$ unter $\kappa \mapsto (\kappa(a^1),\dots,\kappa(a^p)) \in \mathbb{R}^p$. □

Die Umgebungen $W, Y \subset \mathbb{R}^p$ sind noch nicht die Bilder $s_\alpha(U_\alpha)$ der Karten! Wir brauchen Satz 5.8.ii) später für die Offenheit der s_α und Satz 5.8.ii) zum Verschieben in einen generischen Punkt.

5.3 Kandidaten für lokale Karten

Wir gewinnen aus $[\mathcal{D},a]$ gewisse Derivationen δ_j. Die Regularität 3) liefert $[\mathcal{D},a]\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$, die Ordnung-Eins-Bedingung 2) damit $[\mathcal{D},a] \in \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{H}_\infty)$. Somit gilt (siehe Beweis von Satz: 5.2):

$$[\mathcal{D},a] = (a_{kl})\ , \qquad a_{kl} = (\eta_k|[\mathcal{D},a]\eta_l) \in \mathcal{A}\ .$$

Betrachte die Abbildung $\mathcal{A} \ni a \mapsto L_{kl}(a) := (\eta_k|[\mathcal{D},a]\eta_l) \in \mathcal{A}$. Wegen der Kommutativität der Algebra und der Ordnung-Eins-Bedingung sind die L_{kl} Derivationen von $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} L_{kl}(ab) &= (\eta_k,[\mathcal{D},ab]\eta_l) = (\eta_k,[\mathcal{D},a]b\eta_l) + (\eta_k,a[\mathcal{D},b]\eta_l) \\ &= (\eta_k,[\mathcal{D},a]\eta_l)b + (\eta_k,[\mathcal{D},b]\eta_l)a = L_{kl}(a)b + aL_{kl}(b)\ . \end{aligned}$$

Damit haben wir $[\mathcal{D},a] = \sum_{k,l=1}^n L_{kl}(a)e\epsilon_{kl}e$ mit Matrixbasen $\epsilon_{kl} \in M_n(\mathcal{A})$ und $e\epsilon_{kl}e \in \mathrm{End}_\mathcal{A}(\mathcal{H}_\infty)$. Unter Verwendung der Polarisationsformel

$$\begin{aligned} 2(\xi,T\eta) &= (\xi+\eta,T(\xi+\eta)) - (\xi,T\xi) - (\eta,T\eta) \\ &\quad - \mathrm{i}\{(\xi+\mathrm{i}\eta,T(\xi+\mathrm{i}\eta)) + \mathrm{i}(\xi,T\xi) + \mathrm{i}(\mathrm{i}\eta,\mathrm{i}\eta)\} \end{aligned}$$

läßt sich erreichen:

$$[\mathcal{D},a]=\sum_{j=1}^{m}\delta_j(a)\gamma_j\;,\qquad \delta_j(a)=\mathrm{i}(\xi_j,[\mathcal{D},a]\xi_j)$$

für gewisse $\xi_j\in\mathcal{H}_\infty$ und $\gamma_j\in\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$. Die Summe ist endlich, und die δ_j sind $*$-Derivationen wegen $(\xi,[\mathcal{D},a^*]\xi)=-(\xi,[\mathcal{D},a]^*\xi)=-([\mathcal{D},a]\xi,\xi)=-(\xi,[\mathcal{D},a]\xi)^*$.

Wir setzen diese Zerlegung für $[\mathcal{D},a]$ in das Bild $\gamma=\pi_{\mathcal{D}}(c)$ des Hochschild-Zykels ein, wobei wir $(a^j_\alpha)^*=a^j_\alpha$ voraussetzen können.

$$\gamma=\sum_\alpha a^0_\alpha T_\alpha\;,\qquad T_\alpha:=\sum_{\beta\in S_p}\epsilon(\beta)\sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{m}\delta_{j_1}(a_\alpha^{\beta(1)})\cdots\delta_{j_p}(a_\alpha^{\beta(p)})\gamma_{j_1}\cdots\gamma_{j_p}$$

Dabei wurde die Kommutativität der $\delta_{j_i}(a_\alpha^{\beta(i)})\in\mathcal{A}$ untereinander und mit $\gamma_{j_i}\in\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$ benutzt. Wegen der Antisymmetrisierung tragen nur paarweise verschiedene j_i zu T_α bei. Wir können deshalb die Summe ersetzen durch die Summe über alle p-elementigen Teilmengen $F\subset\{1,\dots,m\}$ mit $|F|=p$ und die Summe über alle Permutationen σ von F, welche wir (nach Umbenennung von $\beta=\beta'\circ\sigma$) in eine Permutation der γ_{j_i} überführen:

$$\begin{aligned}T_\alpha&=\sum_{\beta'\in S_p}\sum_{1\leq j_1<j_2<\dots<j_p\leq m}\sum_{\sigma\in S_p}\epsilon(\beta'\circ\sigma)\delta_{\sigma(j_1)}(a_\alpha^{\beta'(\sigma(1))})\cdots\delta_{\sigma(j_p)}(a_\alpha^{\beta'(\sigma(p))})\gamma_{\sigma(j_1)}\cdots\gamma_{\sigma(j_p)}\\&=\sum_{\beta'\in S_p}\epsilon(\beta')\sum_{1\leq j_1<j_2<\dots<j_p\leq m}\delta_{j_1}(a_\alpha^{\beta'(1)})\cdots\delta_{j_p}(a_\alpha^{\beta'(p)})\sum_{\sigma\in S_p}\epsilon(\sigma)\gamma_{\sigma(j_1)}\cdots\gamma_{\sigma(j_p)}\\&=\sum_{1\leq j_1<j_2<\dots<j_p\leq m}\det\big(\delta_{j_i}(a^k_\alpha)\big)\sum_{\sigma\in S_p}\epsilon(\sigma)\gamma_{\sigma(j_1)}\cdots\gamma_{\sigma(j_p)}\;.\end{aligned}$$

Im Schritt zur 2. Zeile wurde die Reihenfolge der $\delta_i(a_\alpha^{\beta'(i)})$ getauscht. Die Determinante ist als Leibniz-Formel zu verstehen.

Wir erinnern an die Konstruktion (bedingte Erwartungswerte)

$$M_n(\mathcal{A})\supset\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)\ni T=(T_{kl})\mapsto E_{\mathcal{A}}(T):=\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l}{l}\sum_{k=1}^{n}T_{kk}\in\mathcal{A}$$

aus Satz 5.2, mit p_l als Projektor auf die Menge der Zusammenhangskomponenten von X mit $\dim(S_\chi)=l$. Für $T=e\,\mathrm{diag}(f,\dots,f)$ war $E_{\mathcal{A}}(T)=f$, insbesondere $E_{\mathcal{A}}(e)=1$. Wir betrachten

$$\rho_\alpha:=\mathrm{i}^{\frac{p(p+1)}{2}}E_{\mathcal{A}}(\gamma T_\alpha)\in\mathcal{A}\subset A=C(X)\;.$$

Damit können wir Kandidaten für lokale Karten (U_α,s_α) definieren als

$$\begin{aligned}U_\alpha&:=\{\chi\in X\;:\;\rho_\alpha(\chi)\neq0\}\subset X\\ s_\alpha(\chi)&:=(\chi(a^1_\alpha),\dots,\chi(a^p_\alpha))\in\mathbb{R}^p\;,\qquad\chi\in X\;.\end{aligned}$$

Satz 5.9 *Die U_α bilden eine offene Überdeckung von X.*

Beweis. Die U_α sind offen als Urbild einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ unter der stetigen reellwertigen Funktion ρ_α. Wegen $\gamma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\infty} = e$ gilt

$$\gamma \sum_\alpha a^0_\alpha T_\alpha = e \;.$$

Berechnung des bedingten Erwartungswertes und Verwendung von $E_{\mathcal{A}}(aT) = a\,E_{\mathcal{A}}(T)$ für $a \in \mathcal{A}$ und $T \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$ ergibt

$$1 = \mathrm{i}^{-\frac{p(p+1)}{2}} \sum_\alpha a^0_\alpha \rho_\alpha \;.$$

Damit gibt es zu jedem $\chi \in X$ ein α mit $\rho_\alpha(\chi) \neq 0$, also $\chi \in U_\alpha$. □

Satz 5.10 *Für jede der Derivationen $\delta_j(a) = (\xi_j, [\mathcal{D}, a]\xi_j)$ sei die Annahme 5.6 erfüllt. Dann gilt:*

i) *Ist $\chi \in U_\alpha$, dann gibt es p Derivationen $\delta_1, \dots, \delta_p$ mit $\det(\chi(\delta_j a^k_\alpha)) \neq 0$.*

ii) *Die Abbildung $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^p$ ist offen und stetig.*

Beweis. i) Es gilt $\rho_\alpha(\chi) \neq 0$. Einsetzen von T_α ergibt

$$0 \neq \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq m} \det\big(\delta_{j_i}(a^k_\alpha)\big)(\chi) \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) E_{\mathcal{A}}(\gamma\gamma_{\sigma(j_1)} \cdots \gamma_{\sigma(j_p)})(\chi) \;.$$

Damit gibt es zumindest eine Auswahl von p Indizes $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq m$ mit $\det\big(\delta_{j_i}(a^k_\alpha)\big)(\chi) \neq 0$.

ii) Stetigkeit der s_α ist klar. Sei $V \subset U_\alpha$ offen und $\chi \in V$ beliebig. Zu zeigen ist, daß $s_\alpha(V)$ eine offene Umgebung von $s_\alpha(\chi)$ enthält. Nach i) gibt es Derivationen $\delta_1, \dots, \delta_p$ mit $\det \chi(\delta_j a^k_\alpha) \neq 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.8.ii) für das Tupel $(a^1_\alpha, \dots, a^p_\alpha)$ erfüllt, und die dort betrachteten Abbildungen $\kappa \mapsto (\kappa(a^1_\alpha), \dots \kappa(a^1_\alpha)) = s_\alpha(\kappa)$ werden gerade die Kartenabbildungen. Folglich enthält das Bild der offenen Umgebung $V \subset X$ von χ unter s_α eine offene Umgebung von $s_\alpha(\chi)$. □

5.4 Verbleibende Beweisschritte

Zum vollständigen Beweis, daß $s_\alpha : U_\alpha \to s_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^p$ Homöomorphismen sind (erforderlich zur Rekonstruktion der Mannigfaltigkeit), fehlt somit noch:

i) Für die Derivationen $\delta_j(a) = (\xi_j, [\mathcal{D}, a]\xi_j)$ gilt Annahme 5.6.

ii) $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^p$ ist injektiv.

Teil i) wird in [15, §5+6] bewiesen. In [15, §7+8+9+10] wird die Injektivität ii) zunächst nur “fast überall” gezeigt, genauer:

Lemma 5.11 ([15, Lemma 10.3]) *Sei $V \subset U_\alpha$ offen mit $\bar{V} \subset U_\alpha$. Dann existiert eine dichte offene Teilmenge $Y \subset s_\alpha(V)$, so daß jeder Punkt von $s_\alpha^{-1}(Y) \cap V$ eine offene Umgebung $N \subset X$ besitzt, so daß die Einschränkung von s_α auf N ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ist.*

Dieses Resultat wird mit Satz 5.8.i) kombiniert: Für $t = (t_1, \dots, t_p)$ induziert $\sigma_t := F^1_{t_1} \circ \dots \circ F^p_{t_p} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ eine Abbildung $\sigma_t^* : X \to X$ durch $(\sigma_t^*\chi)(a) = \chi(\sigma_t(a))$. Dann ist $t \mapsto \psi_\kappa(t) = s_\alpha(\sigma_t^*\kappa)$ ein stetig von $\kappa \in Z$ abhängiger Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^p$ von 0 und einer offenen Umgebung $Y_\kappa \subset \mathbb{R}^p$ von $s_\alpha(\kappa)$.

Ist $s_\alpha(\chi) \in Y$, so ist bereits alles klar. Ansonsten müssen wir χ verschieben: Jede offene Umgebung von $s_\alpha(\chi)$, insbesondere das Bild von W unter ψ_χ, enthält einen Punkt aus Y. Also gibt es ein $u_0 \in W$, so daß $\sigma^*_{u_0}\chi \in V$ und $s_\alpha(\sigma^*_{u_0}\chi) \in Y$. Dann ist $\kappa := \sigma^*_{u_0}\chi \in s_\alpha^{-1}(Y) \cap V$, und es gibt eine offene Umgebung $N \subset X$ von κ, die durch s_α homöomorph auf eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^p$ abgebildet wird. Somit sind $(a^1_\alpha, \dots, a^p_\alpha)$ lokale Koordinaten in einer Umgebung von κ, und

$$(x^1, \dots, x^p) \quad \text{mit} \quad x^j := \sigma_{u_0}(a^j) \in \mathcal{A}\;, \quad x^j = (x^j)^*\;,$$

sind lokale Koordinaten in einer Umgebung von $\chi = (\sigma^{-1}_{u_0})^*\kappa$. Da $\sigma^*_{u_0}$ ein Homöomorphismus von X ist, ist $x = s_\alpha \circ \sigma^*_{u_0}$ ein Homöomorphismus zwischen der offenen Umgebung $(\sigma^{-1}_{u_0})^*(N)$ von χ und einer offenen Teilmenge im $\mathbb{R}^p$.

Sei $\tau_t := \sigma_{u_0+t} \circ \sigma^{-1}_{u_0}$. Dann ist

$$\chi \circ \tau_t(x^j) = \chi \circ \sigma_{u_0+t}(a^j_\alpha) = (s_\alpha(\sigma^*_{u_0+t}\chi))^j = \psi^j_\chi(u_0 + t)\;.$$

Setzen wir $h : W - u_0 \to X$ mit $h(t) := \tau_t^*\chi$, dann ist $(x \circ h)(t) = \psi_\chi(u_0 + t)$, d.h. $x \circ h$ ist Diffeomorphismus zwischen $W_1 = W - u_0$ und einer offen Teilmenge des $\mathbb{R}^p$. Wir haben $0 \in W_1$ und $h(0) = \chi$. Also ist h ein Homöomorphismus zwischen einer offenen Umgebung W_1 von 0 und einer offenen Umgebung von χ in X. $\square$

Satz 5.12 *$\mathcal{A}$ ist lokal gegeben als Algebra der glatten Funktionen auf einer beschränkten offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^p$.*

Beweis. Sei $\chi \in X$. Dann gibt es selbstadjungierte $x^j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, p$, so daß $x = (x^1, \dots, x^p)$ ein Homöomorphismus zwischen einer offenen Umgebung U von χ und einer beschränkten offen Teilmenge $x(U) \subset \mathbb{R}^p$ ist. Jeder Funktion $f \in C^\infty_c(x(U))$ wird über den glatten Funktionalkalkül

$$f_x := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{R}^p} dt\; \hat{f}(t) \,\exp\Big(\mathrm{i} \sum_{j=1}^p t_j x^j\Big) \in \mathcal{A}$$

ein Element $f_x \in \mathcal{A}$ zugeordnet. Ist $\kappa \in U$, so ist

$$\kappa(f_x) := \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{R}^p} dt\; \hat{f}(t) \,\exp\Big(\mathrm{i} \sum_{j=1}^p t_j x^j(\kappa)\Big) = f(x \circ \kappa)$$

d.h. $f \circ x : U \to \mathbb{C}$ stimmt auf U mit $f_x \in \mathcal{A}$ überein. Durch Einschränkung auf eine offene Umgebung $V \subset U$, mit $\bar{V} \subset U$, ist $C^\infty(\mathbb{R}^p)|_{x(V)} \subset \mathcal{A}|_V$.

Verbleibt die Umkehrung: $b \in \mathcal{A} \subset C(X)$ definiert über den Homöomorphismus x eine Abbildung $b \circ x^{-1} : x(V) \to \mathbb{C}$. Zu zeigen ist Differenzierbarkeit von $b \circ x^{-1}$ in $y \in x(V)$. Wir können $y \in \psi_\chi(W)$ annehmen, d.h. es gibt ein $t \in W_1$ mit $y = \psi_\chi(u_0 + t)$. Da ψ_χ ein Diffeomorphismus zwischen W und einer offenen Umgebung on y ist, kann äquivalent die Differenzierbarkeit von $b \circ x^{-1} \circ \psi_\chi$ in $u_0 + t$ betrachtet werden. Es gilt

$$b \circ x^{-1} \circ \psi_\chi(u_0 + t) = b \circ h(t) = b \circ (\tau_t^* \chi) = \chi(\tau_t b)$$

Da $t \mapsto \tau_t b$ glatt ist für alle $t \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathcal{A}$ und χ linear ist, ist auch $\chi(\tau_t b)$ glatt und $b \circ x^{-1}$ differenzierbar in $\psi_\chi(u_0 + t)$. □

Somit ist $b \in \mathcal{A}|_V \quad \Leftrightarrow \quad b \circ x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^p)|_{x(V)}$ für eine offene Umgebung $V \subset U \subset X$ von χ. Auf dem Durchschnitt zweier Kartenumgebungen $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ wird damit der Kartenwechsel $x_1 \circ x_2^{-1}$ zu einer C^∞-Abbildung. Da X kompakt ist, genügen endlich viele Karten (V_α, x_α) zur Überdeckung, d.h. X ist differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eingeschränkt auf V_α ist $b \in \mathcal{A}$ eine glatte Funktion, d.h. $\mathcal{A} \subset C^\infty(X)$. Die Umkehrung ergibt sich aus [45, Lemma 2.10], wo eine glatte Zerlegung der Eins durch $0 \leq \psi_\alpha \in \mathcal{A}$ mit $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ und $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \in V_\alpha$ bewiesen wird: Kompakte Mannigfaltigkeiten haben immer eine stetige Zerlegung $\tilde{\psi}_\alpha \in A$, $\alpha = 1, \ldots, n$, der Eins, die einen Projektor $p = (\tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\beta)^{\frac{1}{2}} \in M_n(A)$ definieren. Unter Verwendung der Tatsache, daß $\mathcal{A}$ Fréchet-Prä-C^*-Algebra ist, zeigen Rennie und Várilly, daß es eine Homotopie aus Projektoren zwischen p und einem Projektor $q \in M_n(\mathcal{A})$ gibt. Aus den Diagonalelementen von q entsteht nach Anpassung des Trägers eine glatte Zerlegung ψ_α der Eins. Sei nun $f \in C^\infty(X)$ mit $f|_{V_\alpha} = b_\alpha|_{V_\alpha}$, dann ist $f = \sum_\alpha b_\alpha \psi_\alpha \in \mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A} = C^\infty(X)$.

6 Ergänzungen

Damit ist die Skizze des Rekonstruktionsbeweises abgeschlossen. In [15] wird weiter bewiesen,

i) daß umgekehrt für eine gegebene glatte kompakte orientierte Mannigfaltigkeit ein spektrales Tripel mit den Zusatzbedingungen existiert,

ii) daß die Regularität aller Endomorphismen von $\mathcal{H}_\infty$ automatisch gilt, falls die Multiplizität der Wirkung von $\mathcal{A}''$ in $\mathcal{H}$ gleich $2^{\frac{p}{2}}$ ist. Nach [23] ist X dann eine Spin^c-Manigfaltigkeit.

6.1 Spektrale Tripel zu gegebener Mannigfaltigkeit

In i) wählt man $\mathcal{H} = L^2(X, \bigwedge)$ als den Hilbert-Raum der quadratintegrablen Differentialformen. Sei g eine beliebige Riemannsche Metrik auf X. Über das äußere

Differential lokal gegeben durch $d\xi = e^\mu \wedge \partial_\mu \xi$, die Volumenform und den durch g implementiereten Isomorphismus zwischen Tangential- und Kotangentialraum wird der Hodge-Operator $*$ und damit das Kodifferential d^* definiert. Damit sei $\mathcal{D} = d + d^*$. Man findet $[D, f]\xi = \sum_{\mu=1}^{p} (\partial_\mu f)\gamma^\mu$ mit der Clifford-Multiplikation $\gamma^\mu \xi := e_\mu \wedge \xi - i_{e_\mu}\xi$. Es gilt $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}1$. Mit der lokalen Volumenform $\gamma = \mathrm{i}^{-\frac{p(p+1)}{2}} e^1 \wedge \cdots \wedge e^p$ ergibt sich

$$\sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)\gamma^{\sigma(1)} \cdots \gamma^{\sigma(p)} = p!\mathrm{i}^{\frac{p(p+1)}{2}} (\det g)^{-\frac{1}{2}} \gamma \;,$$

so daß lokal folgener Hochschild-Zykel zu wählen ist:

$$c_\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)(\det g)^{\frac{1}{2}} \otimes x^{\sigma(1)} \otimes \dots x^{\sigma(p)} \;.$$

Über eine Zerlegung (ψ_α) der Eins ergibt sich die globale Form $c = \sum_\alpha \psi_\alpha c_\alpha$.

Es verbleibt der Nachweis der Regularität beliebiger $T \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$. Offenbar ist $T \in \bigcap_{m\geq 0} \delta^m$ genau dann, wenn $T \in \bigcap_{m \geq 0} \tilde{\delta}^m$ mit $\tilde{\delta}T = [\langle \mathcal{D}\rangle, T]$ und $\langle \mathcal{D}\rangle = (\mathcal{D}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. Unter Verwendung von

$$\langle \mathcal{D}\rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \frac{\langle \mathcal{D}\rangle^2}{\lambda + \langle \mathcal{D}\rangle^2}$$

gilt mit $(\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)T = [\mathcal{D}^2, T]$ die Identität

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}^m T &= \frac{1}{\pi^m} \int_0^\infty \Big(\prod_{i=1}^m \frac{1}{\langle \mathcal{D}\rangle^2 + \lambda_i} \Big) ((\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)^m T) \Big(\prod_{j=1}^m \frac{d\lambda_j \sqrt{\lambda_j}}{\langle \mathcal{D}\rangle^2 + \lambda_j} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{\pi^m} \int_0^\infty \underbrace{\Big(\prod_{i=1}^k \frac{1}{\langle \mathcal{D}\rangle^2 + \lambda_i} \Big) ((\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)^{m+k} T) \langle \mathcal{D}\rangle^{-m}}_{\mathcal{T}_k(\lambda)} \prod_{j=1}^m \frac{d\lambda_j \sqrt{\lambda_j} \langle \mathcal{D}\rangle}{(\langle \mathcal{D}\rangle^2 + \lambda_j)^2} \;.
\end{aligned}$$

Wegen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}1$ ist $\mathcal{D}^2$ ein skalarer elliptischer Operator. Ist P ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung q, dann verschwindet das Hauptsymbol von $[\mathcal{D}^2, P]$ der Ordnung $q+2$. Ist T von Ordnung 0, dann ist also $(\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)^{m+k}T$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m+k$ und damit $|\mathcal{T}_k(\lambda)| \leq |\mathcal{T}_k(0)|$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $-k$. Das verbleibende Integral ist $\displaystyle\int \frac{d\lambda_j \sqrt{\lambda_j}\langle \mathcal{D}\rangle}{(\langle \mathcal{D}\rangle^2 + \lambda_j)^2} = \frac{\pi}{2}$, so daß $\tilde{\delta}^m T$ beschränkt ist.

6.2 Spin^c-Mannigfaltigkeiten

Wir diskutieren nun die Bemerkung ii), wo X eine Spin^c-Mannigaltigkeit wird, für den Fall gerader Dimension p.

Definition 6.1 (siehe [51, §2]) Sei (X, g) eine kompakte differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, $A = C(X)$ und $B = \Gamma(C\ell(X))$ die Algebra der stetigen Schnitte des Clifford-Bündels $C\ell(X)$ über X, erzeugt vom Kotangentialbündel T^*X und der Metrik g^{-1}. Ein *Clifford-Modul* über X ist ein endlich erzeugter projektiver rechter A-Modul $\mathcal{E}$ mit hermitescher Struktur $(\,|\,) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, zusammen mit einem Homomorphismus $c : B \to \mathrm{End}_A(\mathcal{E})$, so daß $(\xi|c(\lambda)\eta) = (c(\lambda^*)\xi|\eta)$ für $\lambda \in B$ und $\xi, \eta \in \mathcal{E}$. (Somit ist $\mathcal{E}$ ein B-A-Bimodul.)

Gibt es einen B-A-Bimodul $\mathcal{E}$ mit $\mathrm{End}_A(\mathcal{E}) \simeq B$, so heißt X eine Spin^c-Mannigfaltigkeit, und Isomorphieklassen solcher B-A-Bimoduln heißen Spin^c-Strukturen.

Die Definition überträgt sich auf Fréchet-prä-C^*-Algebren. Es bietet sich an, $\mathcal{E} = \mathcal{H}_\infty$ zu nehmen. Fraglich ist dann, ob $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty) = \Gamma^\infty(C\ell(X))$ die Algebra der glatten Schnitte des Clifford-Bündels ist. Ist $\dim(X) = p$ gerade, dann haben die Fasern von $C\ell(X)$ die Dimension 2^p.

Ausgangspunkt des Beweises ist [15, Proposition 5.11]

$$\|\,\|\text{-}\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-1} e^{i\tau h}|\mathcal{D}|e^{-i\tau h}\xi = |[\mathcal{D}, h]|\xi \qquad \text{für alle } \xi \in \mathrm{dom}(\mathcal{D})\ ,\ h = h^* \in \mathcal{A}\ .$$

Aus der Regularität folgt dann $\big[|[\mathcal{D}, h]|, [\mathcal{D}, a]\big]\xi = 0$ und weiter $\big[[\mathcal{D}, h]^2, [\mathcal{D}, a]\big]\xi = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Die Faser S_χ von $\mathcal{H}_\infty$ über $\chi \in X$ ist ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Sei $M_\chi \subset \mathrm{End}(S_\chi)$ die durch $[\mathcal{D}, a]_\chi$ erzeugte Unteralgebra; sie ist isomorph zu einer direkten Summe von Matrix-Algebren $M_\chi \simeq M_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{k_r}(\mathbb{C})$. Es gilt $([\mathcal{D}, a][\mathcal{D}, b] + [\mathcal{D}, b][\mathcal{D}, a])_\chi \in Z(M_\chi)$. Das Zentrum $Z(M_\chi)$ besteht aus Linearkombinationen von minimalen Projektoren auf die einzelnen $M_{k_i}(\mathbb{C})$. Sei $e_1 = e_1^* = e_1^2 \in Z(M_\chi)$ ein solcher minimaler Projektor, dann ist wegen $\gamma^2 = 1$

$$e_1\gamma_\chi = \sum_\alpha (e_1 a_0^\alpha \sum_{\beta\in S_p} \epsilon(\beta)[\mathcal{D}, a_\alpha^{\beta(1)}] \cdots [\mathcal{D}, a_\alpha^{\beta(p)}])_\chi \neq 0\ .$$

Insbesondere sind die $e_1[\mathcal{D}, a_\alpha^j]_\chi$ linear unabhängig, also ist die Dimension der Algebra $T^*_{e_1}(\chi) := \{e_1[\mathcal{D}, a]_\chi \ :\ a \in \mathcal{A}\}$ mindestens p.

Für selbstadjungierte $e_1[\mathcal{D}, a]_\chi \in T^*_{e_1}(\chi)$ definiert $e_1[\mathcal{D}, a]_\chi \mapsto (e_1[\mathcal{D}, a]_\chi)^2 \in \mathbb{R}e_1$ eine nichtausgeartete quadratische Form $Q : T^*_{e_1}(\chi) \times T^*_{e_1}(\chi) \to \mathbb{R}$. Sei $C\ell_Q$ die zugehörige Clifford-Algebra von $T^*_{e_1}(\chi)$, dann ist ihre Dimension $\geq 2^p$. Da $C\ell_Q$ in $\mathrm{End}(e_1S_\chi)$ als Identität dargestellt ist, muß $\dim(e_1S_\chi) \geq 2^{\frac{p}{2}}$ sein. Nach Voraussetzung ist aber $\dim(S_\chi) = 2^{\frac{p}{2}}$, also ist $e_1 = 1_{2^{\frac{p}{2}}}$ der einzige minimale Projektor, und die $[\mathcal{D}, a_\alpha^j]$ bilden auf $U_\alpha \ni \chi$ eine lokale Basis von $T^*(\chi)$. Damit läßt sich jeder Endomorphismus von $\mathcal{H}_\infty$ schreiben als Polynom in $[D, a]$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{A}$, ist also automatisch regulär. Schließlich ist $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty) = \mathcal{B} = \Gamma^\infty(C\ell_Q(X))$.

Der Kotangentialraum $T^*_\chi X$ hat die gleiche reelle Dimension p wie der Raum der selbstadjungierten Elemente von $T^*_\chi = \{[\mathcal{D}, a]_\chi \ :\ a \in \mathcal{A}\}$. Die Abbildung

$c : (da)_\chi \mapsto \mathrm{i}[\mathcal{D}, a]_\chi$ liefert einen Isomorphismus zwischen $T^*_\chi X$ und T^*_χ, und über

$$([\mathcal{D}, a][\mathcal{D}, b] + [\mathcal{D}, b][\mathcal{D}, a]) =: -2g^{-1}(da, db)1_{2^{\frac{p}{2}}}$$

wird eine Metrik auf $T^*_\chi X$ definiert. Somit ist $\mathcal{B}$ isomorph zu $\Gamma^\infty(C\ell(X))$, und X ist eine Spin^c-Mannigfaltigkeit. Die detaillierte Konstruktion ist in [23, §11] gegeben. Insbesondere ergibt sich $\|c(da)\| = \sup_{\chi \in X} \|(\operatorname{grad} a)(\chi)|$ und damit Connes' Abstandsformel

$$\mathrm{dist}_g(\chi, \kappa) = \sup\{|a(x) - a(y)| \;:\; a \in \mathcal{A}\,,\; \|[\mathcal{D}, a]\| \leq 1\}\;.$$

Weiter ist $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{S})$ der Hilbert-Raum der quadratintegrablen Schnitte des Spinor-Bündels über X. Die Metrik g^{-1} auf $T^*_\chi X$ definiert dann den Dirac-Operator $\not{\mathcal{D}}$ zum Spin-Zusammenhang auf $\mathcal{S}$. Im allgemeinen sind $\not{\mathcal{D}}$ und $\mathcal{D}$ verschieden, sie besitzen aber das gleiche Hauptsymbol.

Teil III
Nichtkommutative Spektrale Tripel: I. Standardmodell

7 Reelle Struktur

Aus verschiedenen Gründen ist es wünschenswert, die Definition spectraler Tripel auf nichtkommutative Algebren zu verallgemeinern. Rein formal lassen sich bis auf die Ordnung-Eins-Bedingung $[[\mathcal{D},a],b]=0$ alle Axiome ins Nichtkommutative übertragen. Die Ordnung-Eins-Bedingung und die Kommutativität waren wichtig, um $a,[D,a]\in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$ als Endomorphismen des projektiven Moduls $\mathcal{H}_\infty=e\mathcal{A}^n$ aufzufassen. Das kann jedoch noch immer erreicht werden, wenn $e\mathcal{A}^n$ als rechter $\mathcal{A}$-Modul betrachtet wird, während Endomorphismen $a,[D,a]\in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_\infty)$ von links wirken. Insbesondere wirkt die Algebra von links und rechts, wobei die rechte Wirkung als Linkswirkung der entgegengesetzten Algebra $(\mathcal{A}^{op},*)$ aufgefaßt werden kann: Als Mengen ist $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{op}$, aber die Multiplikation ist $a*b=ba$. Setzen wir $a^o\xi:=\xi a$ für $a^0\in\mathcal{A}^{op}$ und $\xi\in e\mathcal{A}^n$, dann ist $(a^o\star b^o)\xi=a^o(b^o\xi)$.

Ein andere (sehr wichtige) Quelle für die Bildung einer mit $\mathcal{A}$ kommutierenden Algebra ist die Tomita-Takesaki-Theorie für von-Neumann-Algebren. Sei $\mathcal{M}$ eine von-Neumann-Algebra, welche auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ wirkt, und $\Omega\in\mathcal{H}$ ein zyklischer ($\mathcal{M}\Omega$ ist dicht in $\mathcal{H}$) und separierender (die Abbildung $\mathcal{M}\to\mathcal{M}\Omega$ ist injektiv) Vektor für $\mathcal{M}$. Unter diesen Voraussetzungen entsteht $\mathcal{H}$ aus $(\mathcal{M},\Omega)$ durch die GNS-Konstruktion. Dann kann ein unbeschränkter Operator S auf $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(S)=\mathcal{M}\Omega$ erklärt werden als

$$S(m\Omega):=m^*\Omega\;,\qquad m\in\mathcal{M}\;.$$

Dieser Operator ist abschließbar, und der Abschluß (wieder mit S bezeichnet) besitzt eine Polarzerlegung $S=J|S|$, wobei J eine anti-lineare (*d.h.* $J(\lambda\psi)=\bar{\lambda}J\psi$ für $\lambda\in\mathbb{C}$ und $\psi\in\mathrm{dom}(S)$) partielle Isometrie ist und $|S|=(S^*S)^{\frac{1}{2}}$ positiv und selbstadjungiert. Das Tomita-Takesaki-Theorem besagt:

- J ist anti-unitär (anti-linear und $JJ^*=J^*J=1$) und implementiert die Kommutante $\mathcal{M}'=J\mathcal{M}J$,
- $\mathcal{M}\ni m\mapsto\sigma_t(m):=|S|^{2it}m|S|^{-2it}\in\mathcal{M}$ definiert eine einparametrige Gruppe von Automorphismen von $\mathcal{M}$ (das sind die modularen Automorphismen).

Entsprechend ersetzt Connes die Kommutativität der Algebra und die Ordnung-Eins durch [8]:

Definition 7.1 Ein spektrales Tripel $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ mit $\mathcal{A}$ nicht notwendig kommutativ erfüllt die nichtkommutative Ordnung-Eins-Bedingung, wenn es einen anti-unitären

Operator J auf $\mathcal{H}$ gibt, so daß $[a, JbJ^{-1}] = 0$ und $[[\mathcal{D}, a], JbJ^{-1}] = 0$ für alle $a, b \in \mathcal{H}$.

Sinnvollerweise stellt man Kompatibilitätsforderungen von J mit $\mathcal{D}$ und γ:

Definition 7.2 Der anti-unitäre Operator J auf $\mathcal{H}$ definiert eine *reelle Struktur der KO-Dimension* $k \in \mathbb{Z}/8$ auf dem spektralen Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, wenn

$$J^2 = \epsilon\ , \qquad J\mathcal{D} = \epsilon'\mathcal{D}J\ , \qquad J\gamma = \epsilon''\gamma J \quad \text{für metrische Dimension } p \text{ gerade}\ ,$$

wobei die Vorzeichen $\epsilon, \epsilon', \epsilon'' = \pm 1$ als Funktion von $k \mod 8$ gegeben sind durch

k	0	1	2	3	4	5	6	7
ε	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ε'	1	-1	1	1	1	-1	1	1
ε''	1		-1		1		-1	

Durch $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \bar{T} = JTJ^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ wird eine *reelle Struktur* auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert. Es gilt $\bar{\bar{T}} = T$, $\overline{T^*} = (\bar{T})^*$ und $\overline{T_1T_2} = \bar{T}_1\bar{T}_2$. Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ ein kommutatives spektrales Tripel zu einer Spin^c-Mannigfaltigkeit X, dann definiert J eine reelle Struktur auf dem Clifford-Bündel über X. Die entsprechenden reellen Clifford-Algebren sind periodisch modulo 8 und definieren eine Spin-Struktur auf X. Diese Strukturen übertragen sich in die reelle K-Theorie (KR-Theorie, KO-Theorie). Die Bott-Periodizität ist dann modulo 8. Eine gute Referenz ist R. Meyer [40].

8 Matrix-Beispiele

Der einfachste Realisierung nichtkommutativer spektraler Tripel ist durch Matrizen für $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J)$. Nimmt man als KO-Dimension die metrische Dimension $k = 0$ an, dann wurden die möglichen Realisierungen durch Paschke-Sitarz [42] und Krajewski [32] klassifiziert. Man kann das Tensorprodukt aus einem solchen 0-dimensionalen spektralen Tripel und einem kommutativen spektralen Tripel für eine Spin-Mannigfaltigkeit X bilden. Die dann auftretenden matrixwertigen Funktionen können mit physikalischen Modellen in Verbindung gebracht werden. Insbesondere läßt sich das Standardmodell der Teilchenphysik, welches im Einklang mit allen experimentellen Daten ist, auf diese Weise erhalten. Solche physikalischen Modell werden durch ein Wirkungsfunktional $S[A] = \int_X dx \mathcal{L}[A(x)]$ beschrieben, wobei die matrixwertigen Funktionen A mit physikalischen Teilchen identifiziert werden. In der klassischen Feldtheorie wird $A(x)$ als Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zum Variationsprinzip $S[A] =$ *stationär* erhalten. In der Quantenfeldtheorie werden auch Fluktuationen um diese klassischen Lösungen zugelassen.

Ein Modell der Teilchenphysik ist gegeben durch eine Wahl von A und eine Wahl des Wirkungsfunktionals. Im Standardmodell gibt es folgende Arten von Teilchen:

i) eine $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-wertige 1-Form A (Eichbosonen),

ii) eine $\mathbb{C}^2$-wertige Funktion ϕ (Higgs-Boson),

iii) eine $\mathbb{C}^{96}$-wertige L^2-Funktion ψ (Fermionen).

Das Higgs-Boson spielt eine zentrale Rolle im Stadardmodell: Es erlaubt massive $SU(2)$-Eichbosonen (im Einklang mit dem Experiment), ohne die *Eichsymmetrie* zu verlieren. Das ist eine Wirkung der Gruppe $(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) \otimes C^\infty(X)$ auf den Funktionen A, ϕ, ψ derart, daß das Wirkungsfunktional $S[A, \phi, \psi]$ invariant bleibt. Als Zweipunktfunktion (für eine Funktion A_i) bezeichnet man den Operator $Z_i = \frac{\delta^2 S}{\delta A_i \delta A_i}\Big|_{A=0}$ (Ableitung in Fréchet-Räumen). Dieser Operator ist positiv, hat also reelles Spektrum. Die Zahl $m_i^2 = \inf\{\lambda \in sp(Z_i))$ heißt die Masse von A_i. Es läßt sich zeigen, daß für eine reine Eichtheorie $S[a, \psi]$ stets $m_i = 0$ gilt. Erst das Higgs-Potential $\mathcal{L}[\phi] = \lambda(|\phi|^2 - \mu^2)^2$ gibt über die klassische Lösung $\phi = \mu$ den Teilchen eine Masse proportional zu μ. Die Einführung des Higgs-Potentials in traditionellen Formulierungen des Stadardmodells ist sehr mühsam. In der nichtkommutativen Geometrie entsteht es automatisch als Teil von $S[A_{nc}]$, wobei A_{nc} sowohl A als auch ϕ beinhaltet. Traditionell ist A eine Zusammenhangsform (in der Physik: Eichpotential), das ist eine Lie-Algebra-wertige 1-Form auf X, welche den Paralleltransport in einem Hauptfaserbündel beschreibt. Die zugehörige Krümmungsform ist $F = dA + A \wedge A$ und das Wirkungsfunktional $S[A] = \int_X dx\, F \wedge \star F$ (wobei $*$ der Hodge-Operator ist). In der NCG ist A_{nc} wieder eine 1-Form in einer nichtkommutativen Differentialalgebra (Ω, d), und $\wedge$ wird durch das Produkt in Ω ersetzt.

8.1 Das 2-Punkt-Modell

Wir motivieren das Higgs-Potential für das einfachste nichtkommutative spektrale Tripel auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Die Algebra $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ bleibt kommutativ; sie wirkt als diagonale 2×2-Matrix auf $\mathbb{C}^2$:

$$(f, g) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f\xi_1 \\ g\xi_2 \end{pmatrix}, \qquad (f, g) \in \mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,.$$

Der Differentialkalkül wird nichtkommutativ durch die Wahl

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ \bar{M} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M \in \mathbb{C}\,.$$

Der Raum Ω^1 der 1-Formen wird aufgespannt durch $a[\mathcal{D}, b]$ mit $a, b \in \mathcal{A}$. Man findet

$$\Omega^1 \ni \omega = \begin{pmatrix} 0 & fM \\ g\bar{M} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f, g \in \mathbb{C}\,.$$

Zulässig als Zusammenhangsform sind selbstadjungierte 1-Formen $A = \begin{pmatrix} 0 & \phi M \\ \overline{\phi M} & 0 \end{pmatrix}$. Das Differential ist in diesem Fall als graduierter Kommutator (also Antikommutator für eine 1-Form) mit $\mathcal{D}$ gegeben:

$$dA = \{\mathcal{D}, A\} = \begin{pmatrix} |M|^2(\phi + \bar{\phi}) & 0 \\ 0 & |M|^2(\phi + \bar{\phi}) \end{pmatrix} ,$$

und die Krümmungsform ist

$$F = dA + A^2 = \begin{pmatrix} |M|^2(\phi + \bar{\phi} + |\phi|^2) & 0 \\ 0 & |M|^2(\phi + \bar{\phi} + |\phi|^2) \end{pmatrix} .$$

Das Wirkungsfunktional ist

$$S[A] = \mathrm{tr}(F^2) = 2|M|^4(|\phi + 1|^2 - 1)^2 .$$

Nach Umbezeichnung $\phi + 1 = \frac{1}{\mu}\varphi$ ist $S[A] = \lambda(|\varphi|^2 - \mu^2)^2$, mit $\lambda = \frac{2|M|^4}{\mu^4}$, exakt das Higgs-Potential.

8.2 Historische Versionen der nichtkommutativen Formulierung des Standardmodells

i) Die erste Formulierung eines Higgs-Potentials durch einen auf Derivationen basierenden nichtkommutativen Differentialkalkül ist in [16] zu finden. Die Entwicklung führte insbesondere zur "fuzzy sphere" [38].

ii) Das spektrale Tripel (noch *K-Zykel* genannt) auf $\mathbb{C}^2$ erschien erstmals in [4]. Es wurde von Connes und Lott in [5, 6] zu einer kompletten Formulierung des Standardmodells ausgebaut und in Connes' Buch [7] in Beziehung zu nichtkommutativen Mannigfaltigkeiten gesetzt. Dabei spielt die Poincaré-Dualität eine große Rolle. Interessanterweise gibt es bereits ein J in [7], die Bedeutung wurde aber erst ein Jahr später erkannt. Die physikalischen Konsequenzen sind in einer Reihe von Artikeln von Daniel Kastler [28, 29, 30] aufbereitet.

   Die geometrische Struktur ist ein K-Zykel $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \gamma)$ über $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, d.h. es gibt kommutierende Darstellungen von

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} , \qquad \mathcal{B}_F = \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$$

   (nur Matrix-Anteil geschrieben) im Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{90}$. Die Fundamentalklasse $[(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \gamma)] \in KK(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{C})$ in KK-Theorie soll dann einen Isomorphismus zwischen $K_*(\mathcal{A})$ (K-Theorie von $\mathcal{A}$) und $K^*(\mathcal{B})$ (K-Homologie von $\mathcal{B}$) implementieren (Poincaré-Dualität).

   Ein technisches Problem ist die Definition des Differentials:

- Es kann nicht mehr der Antikommutator mit $\mathcal{D}$ benutzt werden, da $\mathcal{D}^2$ nicht mehr mit der Algebra kommutiert und somit die Leibniz-Regel verletzt wäre.
- Eine Definition $d\omega := \sum[\mathcal{D}, a_i][\mathcal{D}, b_i]$ für $\omega = \sum a_i[\mathcal{D}, b_i]$ wäre abhängig von der Darstellung von ω

Man muß also das Ideal $J = \{\sum[\mathcal{D}, a_i][\mathcal{D}, b_i] \; : \; \sum a_i[\mathcal{D}, b_i] = 0\}$ (den Junk) herausfaktorisieren. Die Gruppe der unitären Elemente von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist $\mathcal{U} = U(1) \times SU(2) \times U(1) \times U(3)$, welches gegenüber dem Standardmodell zwei $U(1)$-Gruppen zu viel enthält. Sie werden per Hand durch eine Unimodularitätsbedingung beseitigt. Die sogenannte bosonische Wirkung ist dann $⨍ \operatorname{tr}(F^2)|\mathcal{D}|^{-p}$, wobei $F = dA + A^2 \mod J$ die Krümmungs-2-Form zur Zusammenhangs-1-Form A ist. Fermionen werden als Elemente des Hilbert-Raums $\psi \in \mathcal{H}$ angesehen, mit Wirkungsfunktional $S = \langle\psi, (\mathcal{D} + A)\psi\rangle$. Durch Vergleich mit dem Experiment ergeben sich die 90 Kopien von $L^2(X, \mathcal{S})$ (rechtshändige Neutrinos sind durch Poincaré-Dualität ausgeschlossen).

iii) Die reelle Struktur erscheint in [8], und ihre Beziehung zu Atiyahs KR-Theorie wird diskutiert. Es wird erstmals von "spektralen Tripeln" gesprochen. Es gibt nur noch eine Algebra $\mathcal{A}$, ihre Kommutante ist $J\mathcal{A}J$ und Poincaré-Dualität wird zu einem Isomorphismus zwischen $K_*(\mathcal{A})$ und $K^*(\mathcal{A})$, vermittelt durch das cup-Produkt mit $\mu \in KR(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$. Nichtkommutative Beispiele sind der nichtkommutative Torus sowie das Standardmodell.

Der sogenannte fermionische Teil der Wirkung ist nicht mehr $\langle\psi, (\mathcal{D} + A)\psi\rangle$, sondern, um Invarianz unter $\psi \mapsto J\psi$ zu erreichen, $\langle\psi, (\mathcal{D} + A + JAJ^*)\psi\rangle$. Dadurch ist es möglich, die Matrix-Algebra auf $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C})$ zu reduzieren. Es gibt also nur noch eine überzählige (1)-Gruppe. Die Symmetriegruppe $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ wirkt nun über die adjungierte Darstellung $(u, \psi) \mapsto uJuJ^*\psi$ auf $\mathcal{H}$.

iv) In [9] erscheint die komplette Liste von Axiomen für spektrale Tripel. Das Rekonstruktionstheorem in der schwachen Formulierung, welche $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ voraussetzt, wird skizziert. Eine wichtige Rolle spielt die Rekonstruktion der Metrik über das Einstein-Hilbert-Wirkungsfunktional (berechnet von Kalau-Walze [27]). Die Konstruktion $\mathcal{D} + A + JAJ^*$ wird als *innere Fluktuation* der durch $\mathcal{D}$ induzierten Metrik verstanden: Durch $(\alpha f)(x) = f(\phi^{-1}(x))$ wird eine Korrespondenz zwischen Diffeomorphismen ϕ von X und Automorphismen α von $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ hergestellt. Nichtkommutative Algebren haben innere Automorphismen $a \mapsto uau^*$ mit $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Entsprechend werden innere Automorphismen als Diffeomorphismen einer nichtkommutativen Mannigfaltigkeit angesehen, und die gravitative Einstein-Hilbert-Wirkung, berechnet für nichtkommutative spektrale Tripel, sollte ein gemeinsames Wirkungsfunktional von Gravitation und Standardmodell liefern.

v) Dieser universellen Wirkung liegt das Spektralwirkungsprinzip von Connes und Chamseddine [1] zugrunde:

Die bosonische Wirkung ist eine alleinige Funktion des Spektrums des fluktuierten Dirac-Operators $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + JAJ^*$, d.h. $S = \mathrm{Tr}(\chi(\mathcal{D}^2))$.

Nach Laplace-Transformation entsteht

$$S = \int_0^\infty dt\ \hat{\chi}(t)\mathrm{Tr}(e^{-t\mathcal{D}_A^2})\ .$$

Für den verallgemeinerten Laplace-Operator hat die Spur des Wärmeoperators eine asymptotische Entwicklung

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\mathcal{D}^2}) = \sum_{k=-\frac{d}{2}}^{\infty} t^k a_k(\mathcal{D}_A^2)\ ,$$

wobei d die Dimension von X ist und $a_k(\mathcal{D}_A^2)$ die Seeley-Koeffizienten sind. Die führenden Beiträge sind bekannt [21]. Aus technischer Sicht ist wichtig, daß die Berechnung der Seeley-Koeffizienten nur die Kenntnis der 1-Formen A benötigt und nicht die Krümmung. Die komplizierte Berechnung des Junks entfällt.

Realisierungen von spektralen Tripeln durch Matrizen wurden von Paschke-Sitarz [42] und Krajewski [32] klassifiziert.

vi) Die Unimodularitätsbedingung wurde in [37] beseitigt und ersetzt durch zentrale Erweiterung von Lifts der Gruppe $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ in $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$. Eine ausführliche Darstellung ist in [47] zu finden.

vii) Der letzte Schritt war eine Realiesierung des Standardmodells in KO-Dimension 6 in [14]. Dadurch sind rechtshändige Neutrinos erlaubt, ohne die Poincaré-Dualität zu verletzen. Des weiteren ist eine Majorana-Masse für die rechtshändigen Neutrinos möglich, welche über den see-saw-Mechanismus den linkshändigen Neutrinos eine extrem kleine Masse gibt, im Einklang mit dem Experiment. In [3] wurde gezeigt, daß die Matrix-Algebra des Standardmodells die minimalste Lösung ist. Die ausführliche Berechnung der Spektralwirkung ist in [2] zu finden. Die Masse des Higgs-Teilchens wird zu $m_H = 170\,\mathrm{GeV}$ vorhergesagt.

9 Matrixwertige spektrale Tripel in KO-Dimension 6

Gesucht werden Realisierungen von $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J)$ durch Räume von Matrizen, so daß

$$J^2 = 1 , \quad J\mathcal{D} = \mathcal{D}J , \quad J\gamma = -\gamma J , \quad [a, JbJ] = 0 , \quad [[\mathcal{D}, a], JbJ] = 0 ,$$
$$\gamma = \gamma^* , \quad \gamma^2 = 1 , \quad \mathcal{D}\gamma = -\gamma\mathcal{D} ,$$

für $a, b, \in \mathcal{A}$. Wir folgen [3].

9.1 Klassifikation von $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, J)$

Wir starten von einer noch sehr allgemeinen Algebra $\mathcal{A}$, die erst im weiteren Verlauf auf die eigentlich interessante Unteralgebra $\mathcal{A}_F$ eingeschränkt wird. Gefordert werden:

i) Es gibt ein $\xi \in \mathcal{H}$, so daß $\mathcal{A} \ni a \to a\xi \in \mathcal{H}$ injektiv ist, d.h. die $\mathcal{A}$-Wirkung hat einen separierenden Vektor $\xi \in \mathcal{H}$.

ii) Es gibt keinen nicht-trivialen Projektor in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, der mit $\mathcal{A}$ und J kommutiert, d.h. $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, J)$ ist irreduzibel.

Lemma 9.1 i) *Es sei $e \neq 1$ ein Projektor in $Z\mathcal{A}$. Dann gilt $eJeJ^{-1} = 0$.*

ii) *Es seien e_1, e_2 Projektoren in $Z\mathcal{A}$ mit $e_1e_2 = 0$. Dann gilt $e_1Je_2J^{-1} + e_2Je_1J^{-1} \in \{0, 1\}$.*

Beweis. i) Zunächst ist $eJeJ^{-1}$ wieder ein Projektor, denn

$$(eJeJ^{-1})(eJeJ^{-1}) \stackrel{(1)}{=} ee(JeJ^{-1})(JeJ^{-1}) = eJeJ^{-1}$$

und $(eJeJ^{-1})^* = (eJeJ^*)^* = JeJ^*e \stackrel{(1)}{=} eJeJ^{-1}$. Dabei ist $\stackrel{(1)}{=}$ die Kommutanten-Bedingung. Dieser Projektor kommutiert mit $\mathcal{A}$ (Kommutante und $e \in Z(\mathcal{A})$) und J:

$$J(eJeJ^{-1}) \stackrel{(2)}{=} (JeJ^{-1})eJ^{-1} \stackrel{(1)}{=} e(JeJ^{-1})J^{-1} \stackrel{(2)}{=} (eJeJ^{-1})J ,$$

wobei $J = J^{-1}$ in $\stackrel{(2)}{=}$ benutzt wurde (würde auch mit $J^2 = -1$ funktionieren). Wegen der Irreduzibilität ist $eJeJ^{-1} = 0$, denn $\mathcal{H} = eJeJ^{-1}\mathcal{H} \subset e\mathcal{H}$ ist durch $e \neq 1$ ausgeschlossen.

ii) Analog zu i) zeigt man, daß $e_1Je_2J^{-1} + e_2Je_1J^{-1}$ ein Projektor ist (wegen $e_1e_2 = 0$), der mit J und $\mathcal{A}$ kommutiert. Wegen der Irreduzibilität ist dieser gleich 0 oder 1. □

Satz 9.2 *Es sei $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ die Komplexifizierung von $\mathcal{A}$. Dann ist eine der folgenden Eigenschaften realisiert:*

- $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}1$.
- $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$ *und* $e_1 = Je_2J^{-1}$ *für die minimalen Projektionen* e_1, e_2.

Beweis. Angenommen, das Zentrum wäre nicht $\mathbb{C}$. Dann gibt es minimale paarweise orthogonale Projektoren $e_1, \dots, e_n$ mit $\sum_{j=1}^n e_j = 1$. Nach Lemma 9.1.i) gilt $1 = 1J1J^{-1} = \sum_{i\neq j} e_iJe_jJ^{-1}$. Nach Lemma 9.1.i) gibt es genau ein Paar (1,2) von Indizes mit $e_1Je_2J^{-1} + e_2Je_1J^{-1} = 1$ und $e_iJe_jJ^{-1} + e_jJe_iJ^{-1} = 0$ für alle anderen Paare. Damit gilt für jedes $i \neq 1, 2$

$$e_i = e_ie_iJ\sum_{k=1}^n e_kJ^{-1} = e_i\sum_{k=1}^n e_iJe_kJ^{-1} = e_i\sum_{k\neq i} e_iJe_kJ^{-1} = -e_i\sum_{k\neq i} e_kJe_iJ^{-1} = 0\ .$$

Folglich ist $e_1 + e_2 = 1$ und $Je_1J^{-1} = e_2$ und $Je_2J^{-1} = e_1$. □

Wir zeigen nun, daß der Fall $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C})$ in KO-Dimension 6 ausgeschlossen ist:

Satz 9.3 *Es sei* $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}1$ *und* γ *eine* $\mathbb{Z}_2$*-Graduierung mit* $\gamma\mathcal{A}\gamma^{-1} = \mathcal{A}$. *Dann gilt* $\gamma J = J\gamma$.

Beweis. Aus $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}1$ folgt für Matrizen $\mathcal{A}_\mathbb{C} = M_k(\mathbb{C})$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und dann $\mathcal{A}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_\mathbb{C}^o \simeq M_{k^2}(\mathbb{C})$ mit $\mathcal{A}_\mathbb{C}^o = J\mathcal{A}_\mathbb{C}J^{-1}$. Connes und Chamseddine zeigen, daß aus der Irreduzibilität folgt:

- $\dim(\mathcal{H}) = k^2$
- Die Wirkung von $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ auf $\mathcal{H}$ ist als Linksmultiplikation auf sich selbst gegeben.
- In der Darstellung $\mathcal{H} = M_k(\mathbb{C})$ ist $J(x) = x^*$.

Sei $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\mathbb{C})$ gegeben durch $\delta(a) = \gamma a\gamma^{-1}$, mit $\delta^2 = 1$. Es sei $\mathcal{A}_\mathbb{C}^o = J\mathcal{A}_\mathbb{C}J^{-1}$. Wegen $\gamma J = \pm J\gamma$ ist mit $b^o = Jb^*J^{-1} \in \mathcal{A}_\mathbb{C}^o$ auch $\delta^o(b^o) = \gamma b^o\gamma^{-1} \in \mathcal{A}_\mathbb{C}^o$, d.h. $\delta^o \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\mathbb{C}^o)$. Sämtliche Automorphismen von $M_k(\mathbb{C})$ sind innere Automorphismen, also gibt es unitäre Matrizen $u, v \in U(n)$, so daß $\delta(a) = uau^*$ und $\delta^o(a^o) = Jva^*v^*J^{-1}$. Somit gilt für $x \in \mathcal{H} = M_k(\mathbb{C})$ die Darstellung $\gamma(x) = uxv^*$, im Einklang mit $\gamma(ax) = (uau^*)(uxv^*) = \delta(a)\gamma(x)$ und $\gamma(a^ox) = \gamma(Ja^*J^{-1}x) = (uxv^*)(vav^*) = \delta^o(a^o)\gamma(x)$. Zusammen mit $Jx = x^*$ folgt

$$J\gamma J^{-1}(x) = (ux^*v^*)^* = vxu^*$$

In KO-Dimension 6 ist $J\gamma J^{-1} = -\gamma$, also $vxu^* = -uxv^*$ oder $zxz = -x$ für $z = u^*v$. Das ergibt $z^2 = -1$ und $zx = xz$ für alle $x \in M_k(\mathbb{C})$. Somit ist $z = \pm\mathrm{i}$, also $u = \pm iv$ und $\gamma(x) = \mp\mathrm{i}uxu^*$. Das ergibt

$$x = \gamma^2(x) = -u^2x(u^*)^2\ ,$$

ein Widerspruch für $x = 1$. $\square$

Sei also $Z(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, d.h. $\mathcal{A}_\mathbb{C} = M_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{k_2}(\mathbb{C})$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Der Hilbert-Raum zerlegt sich in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ mit $\mathcal{H}_i = e_i\mathcal{H}$. Aus $e_2 = Je_1J^{-1}$ folgt $J\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ und $J\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$, und aus der Irreduzibilität dann $\mathcal{H}_1 \simeq M(k_1 \times k_2, \mathbb{C}) \ni x$ und $\mathcal{H}_2 \simeq M(k_2 \times k_1, \mathbb{C}) \ni y$ sowie $J(x, y) = (y^*, x^*)$. Somit ist $\dim(\mathcal{A}_\mathbb{C}) = k_1^2 + k_2^2$ und $\dim(\mathcal{H}) = 2k_1k_2$. Aus der Separiertheitsbedingung $\mathcal{A}_\mathbb{C} \ni a \mapsto a\xi \in \mathcal{H}$ injektiv ergibt sich $\dim(\mathcal{H}) \geq \dim(\mathcal{A}_\mathbb{C})$, also $k_1 = k_2 = k$.

Jetzt kommt Information aus der Teilchenphysik ins Spiel: Gefordert wird, daß $\mathcal{H}_1$ ein rechter $\mathbb{H}$-Modul ist mit nichttrivialer $\mathbb{Z}_2$-Gradiuerung γ_1. Die minimalste Realisierung ist dann

$$\mathcal{A} = M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C}) \;.$$

Letztendlich bleibt $\mathcal{A}$ eine physikalisch motivierte Wahl. Dann ist, bis auf Isomorphismen, die einzige Wahl für γ, J mit $\gamma J = -J\gamma$ gegeben durch

$$J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^* \\ x^* \end{pmatrix} , \qquad \gamma = (\gamma_1, 0) - J(\gamma_1, 0)J^{-1} \in \mathcal{A}\mathcal{A}^{op} , \quad \gamma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 x \\ -y\gamma_1 \end{pmatrix} ,$$

mit $\gamma_1 = \mathrm{diag}(1_2, -1_2) \in M_2(\mathbb{H})$. Damit ist der gerade Anteil $\mathcal{A}^{ev}$ von $\mathcal{A}$ (der mit γ kommutiert) gegeben durch

$$\mathcal{A}^{ev} = (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C}) \;.$$

9.2 Ordnung-Eins

Gesucht wird eine Unteralgebra $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}^{ev}$ maximaler Dimension, so daß die Ordnung-Eins-Bedingung einen "verbindenden" Operator $\mathcal{D}$ für die nichtzusammenhängende Algebra $\mathcal{A}_F$ erlaubt, $[\mathcal{D}, Z(\mathcal{A})] \neq 0$. Wir zeigen, daß es dazu notwendig ist, daß es eine gemeinsame Darstellung (von $\mathbb{C}$) in beiden Zusammenhangskomponenten geben muß.

Für $a \in \mathcal{A}_F$ sei $\pi_i(a) = e_iae_i$, $i = 1, 2$. Die Darstellungen π_i heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Unterdarstellungen besitzten. Es sei $T \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ mit $[T, a] = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}_F$. Dann ist $[e_1Te_2, a] = 0$, also $e_1Te_2\pi_2(a) = \pi_1(a)e_1Te_2$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Zerlegt man auch e_1Te_2 nach Darstellungen von $\mathcal{A}_F$ und sind π_1, π_2 disjunkt, dann kann es kein nichttriviales e_1Te_2 und analog kein nichttriviales e_2Te_1 geben, also

$$[T, a] = 0 \;\; \forall\, a \in \mathcal{A}_F \quad \Rightarrow \quad e_1Te_2 = 0 \;,\; e_2Te_1 = 0 \;.$$

Sei nun $[T, Jb^*J^{-1}] = 0$ oder äquivalent $[J^{-1}TJ, b^*] = 0$ für alle $b \in \mathcal{A}_F$, dann ist für disjunkte Darstellungen π_1, π_2 somit $e_1J^{-1}TJe_2 = Je_2Te_1J^{-1} = 0$ und $e_2J^{-1}TJe_1 = Je_1Te_2J^{-1} = 0$, also

$$[T, a^o] = 0 \;\; \forall\, a \in \mathcal{A}_F \quad \Rightarrow \quad e_1Te_2 = 0 \;,\; e_2Te_1 = 0 \;.$$

Das wenden wir auf die Ordnung-Eins-Bedingung $[[\mathcal{D}, a], b^o] = 0$ für alle $a, b \in \mathcal{A}_F$ an. Es folgt $e_1[\mathcal{D}, a]e_2 = 0$ und $e_2[\mathcal{D}, a]e_1 = 0$ und schließlich $e_1\mathcal{D}e_2 = 0$ und $e_2\mathcal{D}e_1 = 0$. Folglich kann es für disjunkte Darstellungen π_1, π_2 von $\mathcal{A}_F$ keinen verbindenden Operator $\mathcal{D}$ geben.

Sind π_1, π_2 nicht disjunkt, dann gibt es ein $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ derart, daß die involutive Unteralgebra von $\mathcal{A}^{ev}$ gegeben durch

$$\mathcal{A}(T) = \{b \in \mathcal{A}^{ev} \ : \ \pi_2(b)T = T\pi_1(b) \ , \ \pi_2(b^*)T = T\pi_1(b^*)\}$$

von Null verschieden ist. Dann erfüllt $T + T^*$ die Ordnung-Eins-Bedingung für jede Unteralgebra $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}(T)$.

Es sei $(q_1, q_2, m) \in \mathcal{A}^{ev} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus M_4(\mathbb{C})$ und (das Weglassen von q_2 wieder physikalisch begründet)

$$T\pi_1(q_1, q_2, m) = Tq_1 \ , \quad \pi_2(q_1, q_2, m)T = mT \ .$$

Ist $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ gegeben, dann ist

$$\mathcal{A}(T) = \mathbb{H} \oplus \mathcal{C}(T) \ , \qquad \mathcal{C}(T) = \{(q_1, m) \in \mathbb{H} \oplus M_4(\mathbb{C}) \ : \ mT = Tq_1 \ , \ m^*T = Tq_1^*\} \ .$$

- Sei zunächst $\mathrm{rang}(T) = 2$, d.h. $T\mathbb{C}^4$ ist ein zweidimensionaler Untervektorraum. Dann ist nach Zerlegung von $m \in M_4(\mathbb{C}$ in vier 2×2-Blöcke entsprechend Bild und Komplement die Lösungsmatrix $mT = Tq_1$, $m^*T = Tq_1^*$ blockdiagonal, und der Bild-Bild-Block ist durch q_1 bestimmt. Somit ist $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{H} \oplus M_2(\mathbb{C})$ mit reeller Dimension $\dim(\mathcal{C}(T)) \leq 12$.
- Sei $\mathrm{rang}(T) = 1$. Nach Wahl kanonischer Basen für die eindimensionalen Unterräume $(\ker T)^\perp \subset \mathbb{C}^2$ und $\mathrm{im}T \subset \mathbb{C}^4$ wird bis auf unitäre Äquivalenz und Skalierung von T erhalten:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} ,$$

  für $\lambda, m_{ij} \in \mathbb{C}$. Also ist $\mathcal{C}(T) \simeq \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$ mit reeller Dimension $\dim(\mathcal{C}(T)) = 20$ eine größere Unteralgebra als für $\mathrm{rang}(T) = 2$.

Werden Beiträge von Tq_2 zugelassen, also $\mathrm{rang}(T) \in \{3, 4\}$, dann sollte die Dimension von $\mathcal{A}(T)$ nochmals kleiner werden. Somit ist gezeigt:

Satz 9.4 *Bis auf Automorphismen von $\mathcal{A}^{ev}$ existiert genau eine involutive Unteralgebra $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}^{ev}$ maximaler Dimension, welche unter Ordnung-Eins-Bedingung* *einen nichtdiagonalen Operator $\mathcal{D}$ erlaubt. Diese Algebra ist die Matrix-Algebra Standardmodells und gegeben durch*

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$
$$\in M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C}) \;. \qquad \square$$

Der Hilbert-Raum $\mathcal{H} = M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})$ wird üblicherweise durch Elementarteilchen parametrisiert:

$$\mathcal{H} \ni \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} \nu_R & u_{Rr} & u_{Rb} & u_{Rg} \\ e_R & d_{Rr} & d_{Rb} & d_{Rg} \\ \hline \nu_L & u_{Lr} & u_{Lb} & u_{Lg} \\ e_L & d_{Lr} & d_{Lb} & d_{Lg} \end{array} \\ \hline\hline \begin{array}{cc|cc} \nu^c_R & e^c_R & \nu^c_L & e^c_L \\ \hline u^c_{Rr} & d^c_{Rr} & u^c_{Lr} & d^c_{Lr} \\ u^c_{Rb} & d^c_{Rb} & u^c_{Lb} & d^c_{Lb} \\ u^c_{Rg} & d^c_{Rg} & u^c_{Lg} & d^c_{Lg} \end{array} \end{array}\right)$$

9.3 Dirac-Operatoren

Wir klassifizieren "Dirac"-Operatoren $\mathcal{D}_F$, die der Ordnung-Eins-Bedingung genügen und ein masseloses Photon erlauben, d.h. mit der Unteralgebra $\mathbb{C}_F = \{(q_\lambda, \lambda, 0) \;:\; \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{A}_F = \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$ kommutieren. Dabei ist $q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. Um $\mathcal{D}_F$ als Matrix auf $\mathcal{H}_F$ darzustellen, wird der Hilbert-Raum $\mathcal{H}_F = M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{32}$ neu parametrisiert als

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3 \;, \quad \mathcal{H}_1 \simeq \mathbb{C}^8 \ni \begin{pmatrix} \ell_R \\ \ell_L \\ \ell^c_R \\ \ell^c_L \end{pmatrix} \;, \quad \mathcal{H}_3 \simeq \mathbb{C}^{24} \ni \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_R \\ \boldsymbol{q}_L \\ \boldsymbol{q}^c_R \\ \boldsymbol{q}^c_L \end{pmatrix} \;,$$

mit Leptonen

$$\ell_R = \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} \;, \; \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \;, \; \ell^c_R = \begin{pmatrix} \nu^c_R \\ e^c_R \end{pmatrix} \;, \; \ell^c_L = \begin{pmatrix} \nu^c_L \\ e^c_L \end{pmatrix}$$

und Quarks

$$\boldsymbol{q}_R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_R \\ \boldsymbol{d}_R \end{pmatrix} \;, \; \boldsymbol{q}_L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_L \\ \boldsymbol{d}_L \end{pmatrix} \;, \; \boldsymbol{q}^c_R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^c_R \\ \boldsymbol{d}^c_R \end{pmatrix} \;, \; \boldsymbol{q}^c_L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^c_L \\ \boldsymbol{d}^c_L \end{pmatrix} \;.$$

Dabei sind zunächst $\nu, e \in \mathbb{C}$ und $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{C}^3$.

In der Zerlegung $\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3$ schreiben wir lineare Operatoren T auf $\mathcal{H}_F$ als $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{pmatrix}$. Dabei ist $T_{11} \in M_8(\mathbb{C})$ und $T_{33} \in M_{24}(\mathbb{C})$. Aus den vorangegangenen Untersuchungen folgt, daß $\mathcal{A}_F, J_F, \gamma_F$ diagonal sind, also keine $_{13}$ und $_{31}$ Anteile haben. Für die Diagonalanteile lesen wir ab:

$$(q,\lambda,m)_{11} = \begin{pmatrix} q_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 1_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda 1_2 \end{pmatrix}, \qquad q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$(q,\lambda,m)_{33} = \begin{pmatrix} q_\lambda \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_2 \otimes m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_2 \otimes m \end{pmatrix},$$

$$J_{11} \begin{pmatrix} \ell_R \\ \ell_L \\ \ell_R^c \\ \ell_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\ell_R} \\ \overline{\ell_L} \\ \overline{\ell_R^c} \\ \overline{\ell_L^c} \end{pmatrix},$$

$$J_{33} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_R \\ \boldsymbol{q}_L \\ \boldsymbol{q}_R^c \\ \boldsymbol{q}_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_2 \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_2 \otimes 1_3 \\ 1_2 \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_2 \otimes 1_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{q}_R} \\ \overline{\boldsymbol{q}_L} \\ \overline{\boldsymbol{q}_R^c} \\ \overline{\boldsymbol{q}_L^c} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{33} = \begin{pmatrix} 1_2 \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_2 \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_2 \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_2 \otimes 1_3 \end{pmatrix}.$$

Man bestätigt $\gamma_F^2 = 1$, $\gamma_F = \gamma_F^*$, $J_F^2 = 1$ und $\gamma_F J_F = -J_F \gamma_F$.

Aus $[J_F a J_F^{-1}, [\mathcal{D}_F, b]] = 0$ und $\{\mathcal{D}_F, \gamma_F\} = 0$ folgt, daß auch $\mathcal{D}_F$ diagonal in der Zerlegung $\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3$ sein muß: Wegen der Antikommutativität von $\mathcal{D}_F$ mit γ_F muß jeder Block dieser Zerlegung von der Struktur

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

sein. Dann haben auch $[\mathcal{D}_F, b]_{ij}$ und $[\mathcal{D}_F, J_F b J_F^{-1}]_{ij}$ diese Struktur. Dann hat $0 = [J_F a J_F^{-1}, [\mathcal{D}_F, b]]_{13} = (J_F a J_F^{-1})_{11} [\mathcal{D}_F, b]_{13} - [\mathcal{D}_F, b]_{13} (J_F a J_F^{-1})_{33}$ für alle $a =$

(q,λ,m) nur die Lösung $[\mathcal{D}_F, b]_{13} = 0$, und analog nur $\mathcal{D}_{13} = 0$. Physikalisch sichert $\mathcal{D}_{13} = 0$ die Stabilität des Protons.

Aus $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_F^*$, $\{\mathcal{D}_F, \gamma_F\} = 0$ und $[\mathcal{D}_F, J_F] = 0$ sowie Satz 9.4 folgt nun für die Diagonalblöcke von $\mathcal{D}_F$ die Darstellung

$$\mathcal{D}_{11} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & Y_1 & T & 0 \\ Y_1^* & 0 & 0 & 0 \\ \hline T^* & 0 & 0 & \overline{Y_1} \\ 0 & 0 & Y_1^t & 0 \end{array}\right) , \qquad \mathcal{D}_{33} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \boldsymbol{Y}_3 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{Y}_3^* & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \overline{\boldsymbol{Y}}_3 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{Y}_3^t & 0 \end{array}\right) ,$$

mit zunächst $Y_1 \in M_2(\mathbb{C})$ und $\boldsymbol{Y}_3 \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_3(\mathbb{C}$. Aus Satz 9.4 ergab sich als einzigen Nichtdiagonalblock von D_{ii} die Matrix $T = T^t = \begin{pmatrix} Y_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Es verbleibt die Auswertung der Ordnung-Eins-Bedingung für $Y_1, \boldsymbol{Y}_3$: Für Y_1 ergibt sich keine Einschränkung, während wir für den Quark-Block erhalten:

$$(q_\lambda \otimes 1_3)[\boldsymbol{Y}_3, 1_2 \otimes m] - [\boldsymbol{Y}_3, 1_2 \otimes m](q \otimes 1_3) = 0 \;.$$

Für jeden $2{\times}2$-Unterblock T von $[\boldsymbol{Y}_3, 1_2 \otimes m]$ ergibt sich eine Gleichung $q_\lambda T = Tq$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in \mathbb{H}$, was nur die Lösung $T = 0$ läßt. Also müssen $\boldsymbol{Y}_3$ und $1_2 \otimes m$ miteinander kommutieren, d.h. es gilt $\boldsymbol{Y}_3 = Y_3 \otimes 1_3$ mit $Y_3 \in M_2(\mathbb{C})$.

Nun kommt die Bedingung masseloser Photonen ins Spiel, welche sich auf $[q_\lambda, Y_1] = 0$ und $[q_\lambda, Y_2] = 0$ reduziert. Die Lösung sind Diagonalmatrizen

$$Y_1 = \begin{pmatrix} Y_\nu & 0 \\ 0 & Y_e \end{pmatrix} , \qquad Y_3 = \begin{pmatrix} Y_u & 0 \\ 0 & Y_d \end{pmatrix} .$$

9.4 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrizen

Für das eigentliche Standardmodell werden drei Kopien (sogenannte Generationen) des Hilbert-Raums $\mathcal{H}_F$ benötigt. Die Leptonen werden dann durch $\nu, e \in \mathbb{C}^3$ und die Quarks durch $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ parametrisiert. Entsprechend ist im Dirac-Operator $Y_{\nu,e,u,d,R} \in M_3(\mathbb{C})$. Wir betrachten zwei Dirac-Operatoren $\mathcal{D}_F, \mathcal{D}_F'$ als äquivalent, wenn $\mathcal{D}_F' = U\mathcal{D}_F U^*$ für eine unitäre Matrix U, die mit $\mathcal{A}_F, J_F, \gamma_F$ kommutiert. Damit ist U wieder diagonal, und die beiden Diagonalblöcke haben die Gestalt

$$U_{11} = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(V_1, V_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(V_3, V_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{diag}(\overline{V_1}, \overline{V_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{diag}(\overline{V_3}, \overline{V_3}) \end{pmatrix} ,$$

$$U_{33} = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(W_1, W_2) \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(W_3, W_3) \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{diag}(\overline{W_1}, \overline{W_2}) \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{diag}(\overline{W_3}, \overline{W_3}) \otimes 1_3 \end{pmatrix} ,$$

mit $V_i, W_i \in U(3)$. Die entsprechende Äquivalenzen der Y-Matrizen sind

$$Y'_\nu = V_1 Y_\nu V_3^* \,, \; Y'_e = V_2 Y_e V_3^* \,, \; Y'_R = V_1 Y_R V_1^t \,, \; Y'_u = W_1 Y_u W_3^* \,, \; Y'_d = W_2 Y_d W_3^* \,.$$

Dadurch können die Y-Matrizen auf eine Standardform gebracht werden. Durch (nicht eindeutige) Wahl von V_2, V_3, W_2, W_3 erreicht man $Y'_e = M_e$ und $Y'_d = M_d$ diagonal und positiv. Nach Polarzerlegung ist dann z.B. $Y'_u = W(C_q M_u C_q^*)$ mit M_u diagonal und positiv. Es kann $\det C_q = 1$ angenommen werden. Die unitäre Matrix WC_q wird durch W_1 beseitigt. Allerdings besteht noch immer die Freiheit der Konjugation mit Matrizen $W'_2 = W'_3$ und W'_1 aus dem 2-Torus $\mathcal{N}$ der diagonalen $SU(3)$-Matrizen, welche M_d, M_u nicht ändern. Somit ist die kanonische Wahl $Y'_u = M_u C_q$ mit der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix $C_q \in \mathcal{N} \setminus SU(3)/\mathcal{N}$. Diese Doppel-Nebenklasse ist durch 3 Euler-Winkel $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 2\pi]$ und eine Phase $e^{\mathrm{i}\delta}$ parametrisiert. Die Phase bricht die Symmetrie zwischen Materie und Antimaterie.

Analog ergibt sich $Y'_\nu = M_\nu C_\ell$ mit M_ν diagonal und positiv und $C_\ell \in \mathcal{N} \setminus SU(3)/\mathcal{N}$. Bis auf die Skalierung $V_i \mapsto e^{\mathrm{i}\delta'} V_i$ welche Y'_e, Y'_ν invariant lassen aber $Y_R \mapsto e^{2\mathrm{i}\delta'} Y_R$ liefern, sind alle Freiheiten der V_i ausgeschöpft. Also ist $Y'_R = (Y'_R)^t$ bis auf eine globale Phase eine beliebige symmetrische komplexe 3×3-Matrix, somit parametrisiert durch 11 reelle Zahlen. Insgesamt hat damit der Moduli-Raum der äquivalenten Dirac-Operatoren die Dimension $(3+3+4)+(3+3+4+11) = 31$.

10 Die Spektralwirkung

10.1 Fluktuierter Dirac-Operator

Wir betrachten das Tensorprodukt

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_F \,, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_F \,, \qquad \mathcal{D} = \mathcal{D}_M \otimes 1_F + \gamma_M \otimes \mathcal{D}_F \,, \\ &J = J_M \otimes J_F \,, \qquad \gamma = \gamma_M \otimes \gamma_F \end{aligned}$$

des spektralen Tripels $(\mathcal{A}_M, \mathcal{H}_M, \mathcal{D}_M, \gamma_M, J_M)$ einer vierdimensionalen kompakten Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit (M, g) mit dem Matrix-Spektraltripel $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, \mathcal{D}_F, \gamma_F, J_F)$ aus dem vorigen Abschnitt. Dabei ist $\mathcal{A}_M = C^\infty(M)$, $\mathcal{H}_M = L^2(M, \mathcal{S})$ der Hilbert-Raum der L^2-Schnitte des Spinorbündels $\mathcal{S}$ über M und

$$\mathcal{D}_M = \mathrm{i} e^\mu_a \gamma^a \nabla^s_\mu \,, \quad \nabla^S_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{8} \omega^{ab}_\mu [\gamma_a, \gamma_b]$$

der Dirac-Operator zum Levi-Civita-Zusammenhang. Die Komponenten der induzierten Zusammenhangsform des Spin-Zusammenhangs sind mit ω^{ab}_μ bezeichnet. Dabei sind die γ_a die Generatoren der Clifford-Algebra des $\mathbb{R}^4$, mit der physikalischen Konvention $\gamma^a = (\gamma^a)^*$ und $\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\delta^{ab} 1$ und $\gamma_a = \delta_{ab} \gamma^b = \gamma^a$.

Mit e_a^μ wird das (inverse) Vierbein zur Metrik g bezeichnet, $\delta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu}$. Das Vierbein ist kovariant konstant,

$$\partial_\mu e_a^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho + \omega_\mu^{ab} e_b^\nu = 0 \,.$$

Damit findet man die *Lichnerowicz-Formel*

$$\mathcal{D}_M^2 = \Delta^{LC} + \frac{1}{4}R \,, \qquad \Delta^{LC} = -g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho) \,, \qquad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \,.$$

Die Graduierung ist gegeben durch $\gamma_M = \gamma^5 := \gamma^1 \cdots \gamma^4$. In der üblichen Darstellung durch Pauli-Matrizen, mit $\overline{\gamma^2} = -\gamma^2$ und $\overline{\gamma^a} = \gamma^a$ für $a = 1,3,4$, ist $J_M\psi = \gamma^2\bar{\psi}$ zu setzen. Dann folgen die Vorzeichen für KO-Dimension 4,

$$J_M^2 = -1 \,, \quad J_M\gamma_M = \gamma_M J_M \,, \quad J_M\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M J_M \,.$$

Insgesamt erfüllt $J\psi = \gamma_2 \tilde{J}_F \bar{\psi}$ die Vorzeichen der KO-Dimension 2.

Unter inneren Fluktuationen des Dirac-Operators versteht man die Ersetzung $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + JAJ^{-1}$, wobei $A = A^* = \sum_\alpha a_\alpha[\mathcal{D}, b_\alpha]$ eine 1-Form ist, mit $a_\alpha, b_\alpha \in \mathcal{A}$. Der fluktuierte Dirac-Operator erfüllt die gleichen Axiome, insbesondere $[\mathcal{D}, J] = 0$, $\{\gamma, \mathcal{D}\} = 0$ und die Ordnung-Eins-Bedingung $[JaJ^{-1}, [\mathcal{D}_A, b]] = 0$. Man verwende $[a, JAJ^{-1}] = 0$. Ebenso ändert die Störung $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_A$ nicht die Selbstadjungiertheit und die Asymptotik der Eigenwerte.

Entsprechend den beiden Anteilen $\mathcal{D} \otimes 1_F$ und $\gamma_M \otimes \mathcal{D}_F$ gibt es die beiden Anteile

$$G = e_a^\mu \gamma^a G_\mu \,, \quad G_\mu = \sum_\alpha a_\alpha \partial_\mu(b_\alpha) \in \mathcal{A} \,, \qquad \gamma^5\Phi = \gamma^5 \sum_\alpha a_\alpha[\mathcal{D}_F, b_\alpha]$$

für 1-Formen. Sie sind unabhängig (wähle ein b_α konstant). Wegen $G_\mu \in \mathcal{A}$ ist nur Φ zu berechnen. Die beiden Lepton- und Quark-Blöcke sind

$$\Phi_{11} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \Phi_\ell & 0 & 0 \\ \Phi_\ell^* & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) , \qquad \Phi_\ell = \begin{pmatrix} M_\nu C_\ell \phi_1 & M_\nu C_\ell \phi_2 \\ -M_e\overline{\phi_2} & M_e\overline{\phi_1} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{33} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \Phi_q \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ \Phi_q \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) , \qquad \Phi_q = \begin{pmatrix} M_u C_q \phi_1 & M_u C_q \phi_2 \\ -M_d\overline{\phi_2} & M_d\overline{\phi_1} \end{pmatrix}$$

Der vollständige fluktuierte Dirac-Operator ist damit

$$\mathcal{D}_{A,11} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu^{S,B} & \gamma_5 \Phi_\ell & T & 0 \\ \Phi_\ell^* & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu^{S,B,W} & 0 & 0 \\ \hline T^* & 0 & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \overline{\nabla_\mu^{S,B}} & \gamma_5 \overline{\Phi_\ell} \\ 0 & 0 & \gamma_5 \Phi_\ell^t & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \overline{\nabla_\mu^{S,B,W}} \end{array} \right) ,$$

$$\mathcal{D}_{A,33} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu^{S,B,G} & \gamma_5 \Phi_q & T & 0 \\ \Phi_q^* & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu^{S,W,G} & 0 & 0 \\ \hline T^* & 0 & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \overline{\nabla_\mu^{S,B,G}} & \gamma_5 \overline{\Phi_q} \\ 0 & 0 & \gamma_5 \Phi_q^t & \mathrm{i}\gamma^a e_a^\mu \overline{\nabla_\mu^{S,W,G}} \end{array} \right) ,$$

mit

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{S,B} &= \begin{pmatrix} \nabla_\mu^S & 0 \\ 0 & \nabla_\mu^S - 2\mathrm{i}B_\mu \end{pmatrix} 1_Y \;, \\ \nabla_\mu^{S,B,W} &= \begin{pmatrix} \nabla_\mu^S - \mathrm{i}(B_\mu + W_\mu^3) & -\mathrm{i}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2) \\ -\mathrm{i}(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2) & \nabla_\mu^S - \mathrm{i}(B_\mu - W_\mu^3) \end{pmatrix} 1_Y \;, \\ \nabla_\mu^{S,B,G} &= \begin{pmatrix} \nabla_\mu^S 1_3 - \mathrm{i}((G_\mu^0 - B_\mu)1_3 + G_\mu) & 0 \\ 0 & \nabla_\mu^S 1_3 - \mathrm{i}((G_\mu^0 + B_\mu)1_3 + G_\mu) \end{pmatrix} 1_Y \;, \\ \nabla_\mu^{S,W,G} &= \begin{pmatrix} \nabla_\mu^S 1_3 - \mathrm{i}((G_\mu^0 + W_\mu^3)1_3 + G_\mu) & -\mathrm{i}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2)1_3 \\ -\mathrm{i}(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2)1_3 & \nabla_\mu^S 1_3 - \mathrm{i}((G_\mu^0 - W_\mu^3) + G_\mu) \end{pmatrix} 1_Y \;. \end{aligned}$$

Dabei steht $1_Y = 1_3$ für die Generationen, G_μ ist eine spurfreie hermitesche 3×3-Matrix mit Werten in $C^\infty(M)$, und $B_\mu, W_\mu^a, G_\mu^0 \in C^\infty(M)$ sind reellwertig. Aus physikalischen Gründen wird $\mathrm{tr}(A)$ gefordert (Unimodularität). Das liefert $G_\mu^0 = -\frac{1}{3}B_\mu$, so daß im Quark-Sektor die Faktoren $\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ vor $\mathrm{i}B_\mu$ entstehen. Damit hängen die drittelzahligen elektrischen Ladungen der Quarks zusammen.

10.2 Spektralwirkungsprinzip und Wärmeleitungskern-Entwicklung

Das Spektralwirkungsprinzip von Connes und Chamseddine schlägt vor, daß die sogenannte bosonische Wirkung für die Fluktuationen des Dirac-Operators $\mathcal{D}_A$ eine alleinige Funktion des Spektrums von $\mathcal{D}_A^2$ ist. Nach Funktionalkalkül ist dann

$$S_A = \mathrm{Tr}(\chi(\mathcal{D}_A^2)) = \int_0^\infty dt\; \hat{\chi}(t)\, \mathrm{Tr}(e^{-t\mathcal{D}_A^2}) \;,$$

wobei $\hat{\chi}(t)$ die inverse Laplace-Transformierte von $\chi(s) = \int_0^\infty dt\;\, e^{-st}\hat{\chi}(t)$ ist. Dabei ist $e^{-t\mathcal{D}_A^2}$ der Wärmeleitungsoperator.

Sei (M, g) eine p-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und F ein Vektorbündel über M. Betrachtet werden Differentialoperatoren zweiter Ordnung P auf den Schnitten von F, deren Hauptsymbol durch den metrischen Tensor gegeben sind. Solche Operatoren haben lokal die Darstellung

$P = -(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + A^\rho\partial_\rho + B)$, wobei A^μ, B Endomorphismen von F sind. Unter diesen Voraussetzungen hat die Spur des Wärmeleitungs-Operators eine asymptotische Entwicklung [21, §4.8]

$$\mathrm{Tr}(e^{-tP}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{k-p}{2}} \int_M dx\; a_k(x,P) \;,$$

wobei $a_k(x,P)$ die Seeley-de Witt-Koeffizienten von P sind. Damit läßt sich die Laplace-Transformation invertieren zu

$$\begin{aligned} S_A &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\frac{k-p}{2}} \int_M dx\; a_k(x,\mathcal{D}_A^2) \;, \\ \chi_z &= \int_0^\infty dt\; t^z \hat{\chi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-z)} \int_0^\infty ds\; s^{-z-1}\chi(s) & \text{für } z \notin \mathbb{N} \\ (-1)^k \chi^{(k)}(0) & \text{für } z = k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Seeley-de Witt-Koeffizienten sind im Buch von Gilkey [21, Theorem 4.8.16] tabelliert, allerdings (eindeutig) ausgedrückt als $P = \Delta^F - \mathcal{E}$ durch den Zusammenhangs-Laplacian Δ^F und einen Endomorphismus $\mathcal{E}$ von F. Ist f ein Schnitt von F, dann ist die kovariante Ableitung bezüglich einer Zusammenhangsform ω auf F

$$\nabla f = dx^\mu \otimes (\partial_\mu f + \omega_\mu f) \;.$$

Für die zweite Ableitung ist der metrische Zusammenhang zu berücksichtigen:

$$\nabla^2 f = dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes \Big((\partial_\nu + \omega_\nu)(\partial_\mu f + \omega_\mu f) - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(\partial_\rho f + \omega_\rho f) \Big) \;.$$

Kontraktion mit der negativen Metrik liefert

$$\Delta^F f = -g^{\mu\nu}\Big(\partial_\mu\partial_\nu f + (2\delta^\rho_\nu \omega_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu})\partial_\rho f + (\omega_\mu\omega_\nu + \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\omega_\rho) f \Big)$$

und damit

$$P = \Delta^F - \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\mu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(A^\nu + g^{\rho\sigma}\Gamma^\nu_{\rho\sigma}) \;,\; \mathcal{E} = B - g^{\mu\nu}(\omega_\mu\omega_\nu + \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\omega_\rho) \;.$$

Ausgedrückt durch $\mathcal{E}, \omega$ und den Riemann-Tensor $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ lauten die ersten Seeley-de Witt-Koeffizienten von P:

$$\begin{aligned} a_0(x,P) &= (4\pi)^{-\frac{p}{2}} \mathrm{tr}(\mathrm{id}) \;, \\ a_2(x,P) &= \frac{1}{6}(4\pi)^{-\frac{p}{2}} \mathrm{tr}(-R\mathrm{id} + 6\mathcal{E}) \;, \\ a_4(x,P) &= \frac{1}{360}(4\pi)^{-\frac{p}{2}} \mathrm{tr}\big((5R^2 - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 2R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 12\Delta^{LC}(R))\mathrm{id} \\ &\qquad + 60\Delta^F(\mathcal{E}) - 60R\mathcal{E} + 180\mathcal{E}^2 + 30\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} \big) \;. \end{aligned}$$

Dabei ist $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu + \omega_\mu\omega_\nu - \omega_\nu\omega_\mu$ die Krümmung zur Zusammenhangsform ω_μ, und Indizes werden mit der Metrik $g^{\mu\nu}$ gehoben. Die Spur tr bezieht sich auf Endomorphismen der Faser von F. Die ungeraden a_k verschwinden.

10.3 Diskussion

Es ist nun im Prinzip einfach, aber extrem länglich,

i) $P = \mathcal{D}_A^2$ auszurechnen,

ii) A^μ, B abzulesen,

iii) $\omega_\mu, \mathcal{E}$ zu bestimmen,

iv) die a_k auszurechnen.

Es wird angenommen, daß sämtliche Ableitungen von χ in 0 verschwinden, $\chi^{(k)}(0) = 0$ für $k > 0$. Dann tragen für eine $p = 4$-dimensionale Mannigfaltigkeit nur

- a_0 mit Koeffizient $\chi_{-2} = \int_0^\infty ds\; s\chi(s)$,
- a_2 mit Koeffizient $\chi_{-1} = \int_0^\infty ds\; \chi(s)$,
- a_4 mit Koeffizient $\chi_0 = \chi(0)$

bei. Das Ergebnis ist:

$$
\begin{aligned}
S_A &= \frac{1}{\pi^2}\big(48\chi_{-2} - c\chi_{-1} + d\chi_0\big) \int d^4x\; \sqrt{\det g} \\
&\quad + \frac{1}{24\pi^2}\big(96\chi_{-1} - c\chi_0\big) \int d^4x\; \sqrt{\det g}\, R \\
&\quad + \frac{\chi_0}{10\pi^2} \int d^4x\; \sqrt{\det g}\, \Big(\frac{11}{6} R^* R^* - 3 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2}(-2a\chi_{-1} + e\chi_0) \int d^4x\; \sqrt{\det g}\, |\phi|^2 \\
&\quad + \frac{\chi_0}{2\pi^2} \int d^4x\; \sqrt{\det g}\, a\Big(|D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{6} R|\phi|^2\Big) \\
&\quad + \frac{2\chi_0}{\pi^2} \int d^4x\; \sqrt{\det g}\, \Big(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_3(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) + \frac{5}{3} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\Big) \\
&\quad + \frac{\chi_0}{2\pi^2} \int d^4x\; \sqrt{\det g} |\phi|^4 \;.
\end{aligned}
$$

Dabei sind

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - \mathrm{i}(G_\mu G_\nu - G_\nu G_\mu) \in M_3(C^\infty(M)) \;, \\
W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - \mathrm{i}(W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu) \in M_2(C^\infty(M)) \;, \\
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \in C^\infty(M)
\end{aligned}
$$

die Krümmungen der $SU(3), SU(2), U(1)$-Zusammenhangsformen. Außerdem ist

$$
|\phi|^2 := |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \;, \qquad \begin{pmatrix} D_\mu\phi_1 \\ D_\mu\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu\phi_1 \\ \partial_\mu\phi_2 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} W_\mu^3 - B_\mu & W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2 \\ W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2 & -W_\mu^3 - B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}
$$

sowie

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{tr}(Y_\nu^* Y_\nu + Y_e^* Y_e + 3Y_u^* Y_u + Y_d^* Y_d)\ ,\\
b &= \mathrm{tr}((Y_\nu^* Y_\nu)^2 + (Y_e^* Y_e)^2 + 3(Y_u^* Y_u)^2 + (Y_d^* Y_d)^2)\ ,\\
c &= \mathrm{tr}(Y_R^* Y_R)\ , \qquad d = 4\mathrm{tr}((Y_R^* Y_R)^2)\ , \qquad e = \mathrm{tr}((Y_R^* Y_R)(Y_\nu^* Y_\nu))\ .
\end{aligned}$$

Weiterhin ist $C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma}) + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}R)$ der Weyl-Tensor, und nach partieller Integration und Vernachlässigung der Randterme entsteht $R^*R^* = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}R^{\gamma\delta}_{\rho\sigma}$, dessen Volumenintegral die Euler-Charakteristik ist.

Zum Vergleich mit dem Experiment haben sich die Physiker auf kanonische Vorfaktoren im Integranden der Wirkung geeinigt. Der Vorfaktor

- von $|D_\mu\varphi|^2$ ist $\frac{1}{2}$,

was durch entsprechende Skalierung von ϕ erreicht wird. Nach der Skalierung wird der Vorfaktor

- vor $|\varphi|^2$ mit $-\mu_0^2$,
- vor $|\varphi|^4$ mit λ
- vor R mit $\frac{1}{2\kappa}$

bezeichnet, wobei κ die Einsteinsche Gravitationskonstante ist. Weiter wird der Vorfaktor

- vor $\frac{1}{2}\mathrm{tr}_3(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ mit $\frac{1}{g_3^2}$,
- vor $\frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu})$ mit $\frac{1}{g_2^2}$,
- vor $B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ mit $\frac{1}{g_1^2}$

bezeichnet. Daraus liest man die sehr wichtige experimentell zugängliche Beziehung

$$g_3^2 = g_2^2 = \frac{3}{5}g_1^2$$

ab. Sie ist zunächst klar verletzt; es zeigt sich aber, daß die $g_i(E)$ *energieabhängig* sind und bei höherer Energie sich annähern. Die Daten bestimmen eine kritische Energie Λ, für die $g_3(\Lambda) = g_2(\Lambda)$ gilt. Jetzt wird die Argumentation umgekehrt: Man postuliert, daß die Spektralwirkung zutrifft an einer ausgezeichneten Startenergie Λ.

Die Werte $g_i(E)$ an einer anderen Energie E werden mit Verfahren aus der Quantenfeldtheorie berechnet. Bezeichne ϕ die Menge der dynamischen Felder, $\hat{\phi}(p)$ die Fourier-Transformierten und $S[\phi]$ bzw. $S[\hat{\phi}]$ die Wirkung, welche durch Parameter wie $g_i(\Lambda)$ parametrisiert wird. Die Integration der Fourier-Moden mit $E \leq \|p\| \leq \Lambda$ definiert über das Pfadintegral

$$e^{-S_{eff}^{|p|\leq E}[\hat{\phi}]} = \int_{E\leq\|p\|\leq\Lambda} \mathcal{D}\hat{\phi}(p)\ e^{-S[\hat{\phi}]}$$

eine neue effektive Wirkung $S_{eff}^{|p|\leq E}[\hat{\phi}]$, in die nur noch Moden mit $|p| \leq E$ eingehen. Nach singulären Reskalierungen haben die führenden Anteile in S_{eff} die gleiche Struktur wie S (das Standarmodell ist *renormierbar*), nur mit anderen Parametern wie z.B. $g_i(E)$ statt $g_i(\Lambda)$. Damit liefert $g_2^2(\Lambda) = \frac{5}{3}g_1^2(\Lambda)$ eine Vorhersage für $g_1(E)$, die ungefähr, aber nicht exakt zutrifft (die experimentellen $g_i(E)$ bilden ein Schnitt-Dreieck).

Die Werte für a, b sind bekannt durch die Massen der Fermionen und die Winkel in C_q (es dominiert M_u). Nimmt man $c\chi_0 \ll \chi_{-1}$ und $e\chi_0 \ll a\chi_{-1}$ an, dann bestimmen M_u und κ die Werte von $\mu_0^2(\Lambda)$ und $\lambda(\Lambda)$. Das resultierende Higgs-Potential $-\mu^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4$ wird minimal bei $\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0^2}{2\lambda}}U_2\binom{1}{0}$. Die Matrix $U_2 \in SU(2)\times U(1)$ wird durch eine Eichtransformation beseitigt, so daß nur noch die $U(1)$-Stabilisatorgruppe von $\binom{1}{0}$ als Symmetriegruppe verbleibt. Nach dieser Fixierung von $U_2 \in SU(2) \times U(1)$ kann das Higgs-Feld in die Form $\varphi = \binom{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2\lambda}}+\eta}{0}$ gebracht werden. Dann wird die kovariante Ableitung

$$D_\mu\varphi = \begin{pmatrix} \partial_\mu\eta \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\Big(\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2\lambda}} + \eta\Big)\begin{pmatrix} W_\mu^3 - B_\mu \\ W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2 \end{pmatrix}$$

Als Teil von $\frac{1}{2}|\partial_\mu\varphi|^2$ entsteht $\frac{\mu_0^2}{4\lambda}g^{\mu\nu}\big((W_\mu^3 - B_\mu)(W_\nu^3 - B_\nu) + W_\mu^1 W_\nu^1 + W_\mu^2 W_\nu^2\big)$ und damit ein Masseterm für W^1, W^2 und $Z = \alpha(W^3 - B)$. Der Wert von $\frac{\mu^2}{2\lambda}(E)$ wird an die experimentelle Masse von W angepaßt. Nach Übergang zur Energie E liefern die Beziehungen der Spektralwirkung aber eine unabhängige Vorhersage für $\lambda(E)$ allein, aus der die Masse des noch nicht entdeckten Higgs-Teilchens vorhergesagt wird zu $m_\varphi \sim 170\,GeV$.

Teil IV
Isospektrale Deformationen

Isospektrale Deformationen sind nichtkommutative spektrale Tripel $(\mathcal{A}_\Theta, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, die durch Rieffel-Deformation [46] der Algebra $\mathcal{A}$ eines kommutative spektralen Tripels $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ entstehen. Hilbert-Raum und Dirac-Operator bleiben undeformiert.

Gegeben sei eine abelsche Gruppe $(V, +)$ mit d Erzeugern $\{t^1, \dots, t^d\}$, eine Bilinearform $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ und eine bezüglich $(\ ,\ )$ antisymmetrische Matrix $\Theta = -\Theta^t \in \mathrm{End}(V)$. Es sei $\mathcal{A}$ eine Fréchet-Algebra bezüglich einer Familie $\{p_i\}_{i \in I}$ von Halbnormen, auf welcher eine stark stetige und bezüglich jeder der p_i isometrische V-Wirkung $\alpha : V \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definiert ist. Sei $\mathcal{A}^\infty = \{a \in \mathcal{A} \ :\ t \mapsto \alpha_t(a) \text{ glatt}\}$ die Unteralgebra der glatten Elemente von $\mathcal{A}$. Rieffel führt auf $\mathcal{A}^\infty$ die neuen Halbnormen

$$\tilde{p}_{i,m}(a) = \frac{1}{m!} \sup_{j \leq i} \sum_{|\beta| \leq m} p_j\big(\alpha_{\beta_1 t^1 + \dots + \beta_d t^d}(a)\big) , \qquad \beta_i \in \mathbb{Z}$$

ein. Dann ist das folgende Produkt $\star_\Theta : \mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty \to \mathcal{A}^\infty$ assoziativ und gemeinsam stetig bezüglich der Fréchet-Topologie $\{\tilde{p}_{i,m}\}$:

$$a \star_\Theta b := \int_{V \times V} dt\, ds\ \alpha_{\frac{1}{2}\Theta t}(a)\, \alpha_s(b)\, e^{2\pi \mathrm{i}(t,s)} ,$$

so daß $\mathcal{A}_\Theta := (\mathcal{A}^\infty, \star_\Theta)$ eine neue assoziative Fréchet-Algebra wird. Durch geeigneten Normabschluß entsteht eine C^*-Algebra A_Θ.

11 Der nichtkommutative Torus

11.1 Die Algebra

Startpunkt der Rieffel-Deformation ist die Algebra $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{T}^d)$ der glatten Funktionen des gewöhnlichen $\mathbb{T}^d$. Nach Fourier-Entwicklung gilt

$$C^\infty(\mathbb{T}^d) \ni f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f_k e^{2\pi \mathrm{i} kx} , \qquad kx = k_1 x^1 + \dots + k_d x^d , \qquad (f_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d) ,$$

d.h. die Folge (f_k) ist schnell fallend. Die Halbnormen sind gegeben durch

$$(p_j(f))^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + \|k\|^2)^j |f_k|^2 .$$

Auf $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ wird eine Wirkung der Gruppe $V = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ erklärt als

$$\alpha_t(e^{2\pi \mathrm{i} kx}) = e^{2\pi \mathrm{i} k(x+t)}$$

und lineare Fortsetzung. Wegen $f_k \overset{\alpha_t}{\mapsto} e^{2\pi ikt} f_k$ ist $\tilde{p}_{i,m}(f) = p_i(f)$, und es gilt $\mathcal{A}^\infty = \mathcal{A}$. Für die Rieffel-Deformation folgt

$$(f \star_\Theta g)(x) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} f_k g_l \int_{\mathbb{T}^d} dt \int_{\mathbb{T}^d} ds\; e^{2\pi\mathrm{i}(kx+lx+\frac{1}{2}k\Theta t+ls+st)} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} f_k g_l\; e^{2\pi\mathrm{i}((k+l)x-\frac{1}{2}k\Theta l)} .$$

Die assoziative Algebra $\mathcal{A}_\Theta = (C^\infty(\mathbb{T}^d), \star_\Theta)$ definiert den nichtkommutativen d-Torus.

Häufig wird der nichtkommutative 2-Torus eingeführt über eine Kommutatorrelation zwischen zwei Erzeugern $u = e^{2\pi\mathrm{i}x_1}$ und $v = e^{2\pi\mathrm{i}x_2}$. Dann folgt

$$(u \star_\Theta v)(x_1, x_2) = e^{2\pi\mathrm{i}(x_1+x_2-\frac{1}{2}\Theta_{12})} , \qquad (v \star_\Theta u)(x_1, x_2) = e^{2\pi\mathrm{i}(x_1+x_2-\frac{1}{2}\Theta_{21})} ,$$

und mit $\theta := \Theta_{12} = -\Theta_{21}$ dann $u \star_\Theta v = e^{2\pi\mathrm{i}\theta} v \star_\Theta u$. Für $\theta \in \mathbb{Z}$ entsteht der kommutative 2-Torus. Ist $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, so ist $\mathcal{A}_\Theta$ ein Bündel von $q \times q$-Matrix-Algebren über dem 2-Torus $\mathbb{T}^2_{\frac{1}{q}}$ vom Radius $\frac{1}{q}$: Durch Tausch von u, v kann $\theta > 0$ angenommen werden, und dann $p < q$ nach Abspalten des ganzen Teils. Wegen $u \star_\Theta v = e^{2\pi\mathrm{i}\frac{p}{q}} v \star_\Theta u$ erzeugen u^q, v^q das Zentrum von $\mathcal{A}_\Theta$, d.h. wir identifizieren $U = u^q = e^{2\pi\mathrm{i}qx_1}$ und $V = v^q = e^{2\pi\mathrm{i}qx_2}$ mit den Generatoren von $C^\infty(\mathbb{T}^2_{\frac{1}{q}})$. Mit der Zerlegung $\mathbb{Z} \ni k = k'q + r$ mit $r \in \{0, \dots, q-1\}$ ergibt sich $u^k v^l = U^{k'} V^{l'} u^r v^s$ und damit

$$f = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} f_{kl} u^k v^l = \sum_{r,s=0}^{q-1} u^r v^s \sum_{k',l'\in\mathbb{Z}} f^{rs}_{k'l'} U^{k'} V^{l'} = \sum_{r,s=0}^{q-1} u^r v^s \tilde{f}^{rs} , \qquad \tilde{f}^{rs} \in C^\infty(\mathbb{T}^2) .$$

Die Relationen $u^q = v^q = 1$ und $uv = e^{2\pi\mathrm{i}\frac{p}{q}} vu$ lassen sich nun durch q-dimensionale Matrizen erfüllen ("clock" und "shift"):

$$u = \begin{pmatrix} e^{2\pi\mathrm{i}\frac{1\cdot p}{q}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi\mathrm{i}\frac{2p}{q}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi\mathrm{i}\frac{(q-1)p}{q}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{2\pi\mathrm{i}\frac{qp}{q}} \end{pmatrix} , \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beide Matrizen sind spurfrei, da $\sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi\mathrm{i}\frac{rp}{q}} = \frac{1-e^{2\pi\mathrm{i}p}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\frac{p}{q}}} = 0$. Ist dagegen θ irrational, dann ist das Zentrum von $\mathcal{A}_\Theta$ trivial, und $\mathcal{A}_\Theta$ kann als Limes $p, q \to \infty$, $\frac{p}{q} \to \theta$ unendlicher Matrix-Algebren über einem einzigen Punkt aufgefaßt werden, der im Limes $q \to \infty$ aus dem Torus $\mathbb{T}^2_{\frac{1}{q}}$ vom Radius $\frac{1}{q}$ entsteht. Im beliebiger Dimension n ist Θ durch eine $SL(n, \mathbb{Z})$-Transformation auf die Standardform zu bringen, entsprechend dem $l \leq [n/2]$-fachen Produkt von nichtkommutativen 2-Tori zu den Parametern $\theta_1, \dots, \theta_l$ mit dem kommutativen $n - 2l$-Torus.

Die komplexe Konjugation $f \mapsto f^* = \bar{f}$ definiert eine Involution auf $\mathcal{A}_\Theta$. Für $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_k e^{2\pi i kx}$ folgt $\overline{f(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{f_k} e^{-2\pi i kx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{f_{-k}} e^{2\pi i kx}$, also $* : f_k \mapsto \overline{f_{-k}}$. Durch komplexe Konjugation des Rieffel-Produkts ergibt sich $\overline{(f \star_\Theta g)} = \bar{g} \star_\Theta \bar{f}$.

11.2 Hilbert-Raum und Derivationen

Der Hilbert-Raum wird durch GNS-Konstruktion bezüglich des durch

$$\tau\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_k e^{2\pi i kx}\Big) := f_0$$

definierten Zustands $\tau : \mathcal{A}_\Theta \to \mathbb{C}$ erhalten. Wegen $1_k = \delta_{k,0}$ ist $\tau(1) = 1$, und wegen

$$\tau(f^* \star_\Theta f) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} \bar{f}_{-k} f_l \tau_0\Big(e^{2\pi i((k+l)x - \frac{1}{2}k\Theta l)}\Big) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |f_l|^2 \geq 0$$

ist er positiv. Insbesondere gilt $\tau(f^* \star_\Theta f) = \tau(f^* f)$. Dann wird der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{T}^d, \tau)$ durch L^2-Abschluß bezüglich des Skalarprodukts $\langle \xi, \eta\rangle = \tau(\xi^* \star_\Theta \eta)$ erhalten,

$$L^2(\mathbb{T}^d, \tau) = \Big\{ \xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \xi_k e^{2\pi i kx} \ : \ \xi_k \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)\Big\} .$$

Wegen $\tau(\xi^* \star_\Theta \eta) = \tau(\xi^* \eta)$ ist es der gleiche Hilbert-Raum wie für den kommutativen Torus.

Die GNS-Darstellung der Algebra ist durch $\pi(a)\xi = a \star_\Theta \xi$ gegeben, wobei zu zeigen ist, daß $\star_\Theta : \mathcal{A}_\Theta \times L^2(\mathbb{T}^d, \tau) \to L^2(\mathbb{T}^d, \tau)$ stetig ist. Dann ist 1 ein zyklischer ($\mathcal{A}_\Theta \subset L^2(\mathbb{T}^d, \tau)$ dicht) und separierender Vektor ($a \mapsto a$ injektiv), so daß die Tomita-Involution gegeben ist durch $J_0\xi = \bar{\xi}$. Um eine spektrale Geometrie der KO-Dimension d zu bekommen, ist das Tensorprodukt mit der Clifford-Algebra zu bilden. Wir konstruieren zunächst den Dirac-Operator.

Zunächst generiert die infinitesimale Gruppenwirkung zu den Generatoren $(e^1, \dots, e^d) \in \mathbb{T}^d$ von V die Derivationen

$$\delta_j f = \frac{d}{dh}\alpha_{he^j}(f)\Big|_{h=0} , \qquad \delta_j\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_k e^{2\pi i kx}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (2\pi i k_j f_k) e^{2\pi i kx} .$$

Wegen der Kommutativität von $V = \mathbb{T}^d$ kommutieren die d Derivationen δ_j. Die Derivationseigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned}\delta_j(f \star_\Theta g) &= \delta_j\Big(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} f_k g_l e^{2\pi i((k+l)x - \frac{1}{2}k\Theta l)}\Big) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} (2\pi i(k_j + l_j) f_k g_l) e^{2\pi i((k+l)x - \frac{1}{2}k\Theta l)} \\ &= (\delta_j f) \star_\Theta g + f \star_\Theta (\delta_j g) .\end{aligned}$$

Die δ_j setzen sich zu unbeschränkten Operatoren auf $L^2(\mathbb{T}^d, \tau)$ fort, und der gemeinsame glatte Definitionsbereich ist gerade $\mathcal{A}_\Theta$. Wegen Stokes' Theorem $\tau(\delta_j f) = 0$ sind die δ_j antisymmetrisch, $\delta_j^* = -\delta_j$.

Wir betrachten die einfachste Spin-Geometrie auf dem nichtkommutativen Torus durch die Wahl $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^{[d/2]}} \otimes L^2(\mathbb{T}^d, \tau)$ und

$$\mathcal{D} = \mathrm{i}\gamma^\mu \delta_\mu \;,$$

mit den Generatoren $\{\gamma^\mu\}_{\mu=1,\dots,d}$ der Clifford-Algebra des $\mathbb{R}^d$ und Summation von 1 bis d. Wie üblich ist $\gamma = \mathrm{i}^{\frac{d(d+1)}{2}} \gamma^1 \cdots \gamma^d$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, und es existiert eine Wahl $J\xi = \gamma_j \overline{\xi}$ mit $\gamma_j \in C\ell(\mathbb{R}^d)$, die eine reelle Struktur der KO-Dimension d liefert. In zwei Dimensionen ist z.B.

$$\mathcal{D} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \overline{\sigma}\delta_2 \\ \delta_1 + \sigma\delta_2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ c.c.$$

mit $\sigma = \mathrm{i}$. Es zeigt sich, daß auch für allgemeines $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Spin-Struktur erhalten wird [50]. Der Hochschild-Zykel wird aus den elementaren Fourier-Moden $u_j = e^{2\pi \mathrm{i} x^j}$ aufgebaut, d.h. $k = e_j$. Damit ist $[\mathcal{D}, u_j]\xi = -2\pi\gamma^j u_j \star_\Theta \xi$ (keine Summation), so daß wir setzen:

$$c = \frac{\mathrm{i}^{\frac{d(d-3)}{2}}}{d!(2\pi)^d} \sum_{\beta \in S_d} \epsilon(\beta) (u_{\beta(1)} \star_\Theta \cdots \star_\Theta u_{\beta(d)})^{-1} \otimes u_{\beta(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\beta(d)}$$

Damit ist $\pi_{\mathcal{D}}(c) = \gamma$, und man überprüft $bc = 0$. In zwei Dimensionen gilt mit $u = u_1$, $v = u_2$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{8\pi^2 \mathrm{i}}\big((v^{-1} \star_\Theta u^{-1}) \otimes u \otimes v - (u^{-1} \star_\Theta v^{-1}) \otimes v \otimes u\big) \;, \\ bc &= (v \star_\Theta u)^{-1} \otimes (v \star_\Theta u) - (u \star_\Theta v)^{-1} \otimes (u \star_\Theta v) \;. \end{aligned}$$

Aus $u \star_\Theta v = e^{2\pi \mathrm{i}\theta} v \star_\Theta u$ folgt $bc = 0$. Im allgemeinen Fall ist $\frac{1}{8\pi^2 \mathrm{i}}$ durch $\frac{1}{8\pi^2 \mathrm{Im}(\sigma)}$ zu setzen.

Die Vektoren $u_k = e^{2\pi \mathrm{i} kx}$ sind Eigenvektoren zu $\mathcal{D}^2 = \Delta 1$ zum Eigenwert $4\pi^2\|k\|^2$. Da $\mathcal{D}$ das gleiche Spektrum wie im kommutativen Fall hat (isospektrale Deformation), hat $\mathcal{D}$ kompakte Resolvente, und der n-te charakteristische Wert von $(\mathcal{D} + \mathrm{i})^{-1}$ ist von Ordnung $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d}})$.

11.3 Spektralwirkung

Der fluktuierte Dirac-Operator ist $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \epsilon' JAJ^{-1}$ mit $A = A^* = \sum f_\alpha[\mathcal{D}, g_\alpha] = \gamma^\mu A_\mu$, was $A_\mu = \overline{A_\mu}$ liefert. Ausgedrückt durch Links-Multiplikation $L(a)\xi = a \star_\Theta \xi$ und Rechtsmultiplikation $R(a)\xi = \xi \star_\Theta a$ gilt

$$\mathcal{D}_A = \mathrm{i}\gamma^\mu(\delta_\mu - \mathrm{i}(L(A_\mu) - R(A_\mu))) \;.$$

Im kommutativen Fall $\Theta \in M_d(\mathbb{Z})$ gibt es keine Fluktuationen. Es folgt:

$$P := \mathcal{D}_A^2 = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - E\;, \qquad E = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu](L(F_{\mu\nu}) - R(F_{\mu\nu}))$$

mit $\nabla_\mu = \delta_\mu - \mathrm{i}(L(A_\mu) - R(A_\mu))$ und $F_{\mu\nu} = \delta_\mu A_\nu - \delta_\nu A_\mu - \mathrm{i}(A_\mu \star_\Theta A_\nu - A_\nu \star_\Theta A_\mu)$.

Die Spektralwirkung wurde in [20] berechnet. In der Orthonormalbasis $(u^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ gilt $\mathrm{Tr}(e^{-tP}) = \mathrm{tr}(\tau(u^{-k}e^{-tP}u^k))$, wobei tr die verbleibende Spur in der Clifford-Algebra bezeichnet. Man verwendet

$$e^{-tP}u^k = e^{-4\pi^2\|k\|^2 t}\; e^{t((\nabla_\mu - 2\pi\mathrm{i}k_\mu)(\nabla^\mu - 2\pi\mathrm{i}k^\mu) + 4\pi\mathrm{i}k^\mu(\nabla^\mu - 2\pi\mathrm{i}k^\mu) + E)}u^k\;,$$

entwickelt den zweiten Exponenten in eine Potenzreihe und kommutiert die $\nabla_\mu - 2\pi\mathrm{i}k_\mu$ nach rechts. Dabei entstehen Links- und Rechtsmultiplikationen von mehrfachen kovarianten Ableitungen der Funktionen A_μ. Das Ergebnis hat die Form

$$\mathrm{Tr}(e^{-tP}) = \sum \sum_{k,l,r\in\mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2\|k\|^2 t}\lambda_l(A,t,k)\rho_r(A,t,k)\underbrace{\tau(u^{-k}\star_\Theta u^l \star_\Theta u^k \star_\Theta u^r)}_{=e^{2\pi\mathrm{i}k\Theta l}\delta_{r,-l}}\;.$$

Für reine Linksmultiplikationen trägt nur λ_l bei, für reine Rechtsmultiplikationen nur ρ_r. Dann ist $\lambda_0 = \tau(\lambda)$ die gewöhnliche Spur, die mit dem kommutativen Torus übereinstimmt. Die Seeley-de Witt Koeffizienten sind also die klassischen von Gilkey [21]. Die gemischten Beiträge $\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2\|k\|^2 t + 2\pi\mathrm{i}k\Theta l}\lambda_l(A,t,k)\rho{-}l(A,t,k)$ werden unterteilt in $l = 0$, wo ein Produkt $\tau(\lambda)\tau(\rho)$ entsteht, und die verbleibende Summe über $l \neq 0$. Bis Ordnung a_4 tritt in $\tau(\lambda)\tau(\rho)$ nur die separate Spur $\tau(F_{\mu\nu})\tau(F_{\mu\nu}) = 0$ auf.

Die Summe über $l \neq 0$ wird durch Poisson-Resummierung kontrolliert. Ist der Rang von Θ maximal, dann läßt sich k^μ als Ableitung nach Θl schreiben. In den Beiträgen für $l \neq 0$ entsteht nach Poisson-Resummierung in k

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2\|k\|^2 t + 2\pi\mathrm{i}k\Theta l} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^d} ds\; e^{2\pi\mathrm{i}ms}e^{-4\pi^2\|s\|^2 t + 2\pi\mathrm{i}s\Theta l} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} e^{-\frac{\|\Theta l + m\|^2}{4t}}\;.$$

Unter einer Diophantischen Bedingung

$$\inf_{m\in\mathbb{Z}^d, l\neq 0}\|\Theta l + m\| \geq \frac{C}{\|l\|^{1+\beta}} \qquad \text{für } C,\beta > 0$$

gilt für $m \in \mathbb{Z}^d$ eine Abschätzung $\|\Theta l + m\|^2 \geq \frac{C}{\|l\|^{1+\beta}} + \frac{1}{2}\|m - m_0\|^2$ mit $m_0 \in \mathbb{Z}^d$. Nach Rück-Resummation entsteht eine Abschätzung $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2\|k\|^2 t + 2\pi\mathrm{i}k\Theta l} \leq C' e^{-\frac{C}{4t\|l\|^{1+\beta}}}$, welche für $l \neq 0$ regulär in $t \to 0$ ist und somit nicht zur asymptotischen Entwicklung beiträgt. Die verbleibende Summe über l ist endlich, da $\lambda_l\rho{-}l$ schnell fallend ist. Insgesamt ist die Spektralwirkung für diophantisches Θ bis zur Ordnung a_4 identisch mit dem kommutativen Torus, wenn das kommutative Produkt durch $\star_\Theta$ ersetzt wird.

Die Diophantische Bedingung ist z.B. in der Hochschild-Kohomologie von $\mathcal{A}_\theta$ wichtig: Sei $b_j = \dim(H^j(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*))$, dann gilt $b_0 = b_2 = 1$ und $b_1 = 2$ für diophantisches θ, während für nicht-diophantisches θ die $H^j(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*)$ für $j = 1, 2$ unendlich-dimensionale nicht-Hausdorff-Räume sind [7, Chap. 3, §2.β].

11.4 Projektive Moduln über dem nichtkommutativen 2-Torus

Projektive Moduln $\mathcal{E}_{(c,d)}$ über $\mathcal{A}_\theta$ werden für $d = 2$ klassifiziert durch Paare ganzer Zahlen (c, d) mit $c + \theta d > 0$. Entsprechend ist $K_0(\mathcal{A}_\theta) = \mathbb{Z} \oplus \theta\mathbb{Z}$. Die Standard-Realisierung ist $\mathcal{E}_{(c,d)} = \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_c) \simeq (\mathcal{S}(\mathbb{R}))^c$ mit folgender Rechts-Wirkung der Generatoren u, v von $\mathcal{A}_\theta$ auf $\xi \in \mathcal{E}_{(c,d)}$:

$$(\xi u)(x, \alpha) = \xi\Big(x - \frac{c\theta + d}{c}, \alpha - 1\Big)\,, \quad (\xi v)(x, \alpha) = \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\big(x - \tfrac{d}{c}\alpha\big)\Big)\xi(x, \alpha)\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
(\xi uv)(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(x - \frac{c\theta + d}{c} - \frac{d}{c}(\alpha - 1)\Big)\Big)\xi\Big(x - \frac{c\theta + d}{c}, \alpha - 1\Big) \\
(\xi vu)(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\big(x - \tfrac{d}{c}\alpha\big)\Big)\xi\Big(x - \frac{c\theta + d}{c}, \alpha - 1\Big) = e^{2\pi\mathrm{i}\theta}(\xi uv)(x, \alpha)\,.
\end{aligned}$$

Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, $\det g = ad - bc = 1$. Dann wirkt g auf $\mathbb{R}$ durch gebrochen-rationale Transformation $g\theta = \frac{a\theta + b}{c\theta + d}$, und es kann eine Linkswirkung von $\mathcal{A}_{g\theta}$ (generiert durch u', v') auf $\mathcal{E}_{(c,d)}$ erklärt werden durch

$$(u'\xi)(x, \alpha) = \xi\big(x - \tfrac{1}{c}, \alpha - a\big)\,, \qquad (v'\xi)(x, \alpha) = \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{x}{c\theta + d} - \frac{\alpha}{c}\Big)\Big)\xi(x, \alpha)\,.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
(u'v'\xi)(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{x}{c\theta + d} - \frac{\alpha}{c}\Big)\Big)\xi\big(x - \tfrac{1}{c}, \alpha - a\big)\,, \\
(v'u'\xi)(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{x - \frac{1}{c}}{c\theta + d} - \frac{\alpha - a}{c}\Big)\Big)\xi\big(x - \tfrac{1}{c}, \alpha - a\big) \\
&= \exp\Big(\frac{2\pi\mathrm{i}}{c\theta + d}\frac{a(c\theta + d) - 1}{c}\Big)(u'v'\xi)\big(x, \alpha\big) = e^{2\pi\mathrm{i}g\theta}(u'v'\xi)\big(x, \alpha\big)\,.
\end{aligned}$$

Die Linkswirkung von $\mathcal{A}_{g\theta}$ kommutiert mit der Rechtswirkung von $\mathcal{A}_\theta$:

$$\begin{aligned}
(u'(\xi v))(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\big(x - \tfrac{d}{c}\alpha\big)\Big)\xi(x - \tfrac{1}{c}, \alpha - a) \\
&= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\big(\big(x - \tfrac{1}{c}\big) - \tfrac{d}{c}\big(\alpha - a\big)\big)\Big)\xi(x - \tfrac{1}{c}, \alpha - a) = ((u'\xi)v)(x, \alpha)\,, \\
(v'(\xi u))(x, \alpha) &= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{x - \frac{c\theta + d}{c}}{c\theta + d} - \frac{\alpha - 1}{c}\Big)\Big)\xi\Big(x - \frac{c\theta + d}{c}, \alpha - 1\Big) \\
&= \exp\Big(2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{x}{c\theta + d} - \frac{\alpha}{c}\Big)\Big)\xi\Big(x - \frac{c\theta + d}{c}, \alpha - 1\Big) = ((v'\xi)u)(x, \alpha)\,.
\end{aligned}$$

Die Translationen $u'\xi u$ und Rotationen $v'\xi v$ sind automatisch assoziativ. Folglich implementiert $\mathcal{E}_{c,d}$ eine Morita-Äquivalenz $\mathcal{A}_{g\theta} \simeq \mathcal{A}_\theta$ (es gibt genau diese).

Ein beliebiger projektiver Modul über $\mathcal{A}_\theta$, für θ irrational, ist entweder frei oder isomorph zu genau einem $\mathcal{E}_{(c,d)}$. Die (Murray-von-Neumann-)Dimension von $\mathcal{E}_{(c,d)} = e(\mathcal{A}_\theta)^n$ ist gegeben als Spur $\mathrm{tr} \otimes \tau$ des Projektors e. Man findet $\dim(\mathcal{E}_{(c,d)}) = c\theta + d$.

Auf $\mathcal{E}_{(c,d)}$ wird eine hermitesche Struktur definiert als [7]:

$$(\xi|\eta) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2\pi \mathrm{i} n(x-\frac{d}{c}\alpha)} \bar{\xi}\big(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m\big)\, \eta(x,\alpha)\Big) u^m v^n \;.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
(\xi|\eta u) &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2\pi \mathrm{i} n(x-\frac{d}{c}\alpha)} \bar{\xi}\big(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m\big)\, \eta(x - \tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - 1)\Big) u^m v^n \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2\pi \mathrm{i} n(x-\frac{d}{c}\alpha)} \bar{\xi}\big(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m\big)\, \eta(x,\alpha)\Big) u^{m+1} v^n e^{-2\pi \mathrm{i} n\theta} \\
&= (\xi|\eta) \star_\Theta u
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\xi|\eta v) &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2\pi \mathrm{i}(n-1)(x-\frac{d}{c}\alpha)} \bar{\xi}\big(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m\big)\, \eta(x,\alpha)\Big) u^m v^n \\
&= (\xi|\eta) \star_\Theta v \;.
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\overline{(\eta|\xi)} &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{2\pi \mathrm{i} n(x-\frac{d}{c}\alpha)} \bar{\xi}(x,\alpha)\, \eta\big(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m\big)\Big) v^{-n} u^{-m} \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\alpha=0}^{c-1} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-2\pi \mathrm{i} n(x-m\frac{c\theta+d}{c}-\frac{d}{c}(\alpha-m))} \bar{\xi}(x - m\tfrac{c\theta+d}{c}, \alpha - m)\, \eta\big(x,\alpha\big)\Big) v^n u^m \\
&= (\xi|\eta) \;.
\end{aligned}$$

12 Die Connes- Landi-Sphäre [12]

Die 4-Sphäre ist die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^4 = \{(\alpha,\beta,z) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R} \;:\; \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^5$. Man parametrisiert [12]

$$\begin{aligned}
&\alpha = e^{\mathrm{i}x^1} \cos\phi \sin\psi \;, \quad \beta = e^{\mathrm{i}x^2} \sin\phi\sin\psi \;, \quad z = \cos\psi \;, \\
&0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \;,\; 0 \le \psi \le \pi \;, \quad x, y \in [0, 2\pi] \;.
\end{aligned}$$

Die Algebra $C^\infty(\mathbb{S}^4)$ ist eine Unteralgebra der von $(e^{\mathrm{i}\phi}, e^{\mathrm{i}\psi}, e^{\mathrm{i}x^1}, e^{\mathrm{i}x^2})$ erzeugten Algebra, wobei der $(e^{\mathrm{i}x^1}, e^{\mathrm{i}x^2})$-Anteil frei ist, während es für $(e^{\mathrm{i}\phi}, e^{\mathrm{i}\psi})$ Relationen gibt (sonst wäre es $\mathbb{T}^4$). Wir schreiben

$$C^\infty(\mathbb{S}^4) \ni f(\phi,\psi,x^1,x^2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}kx} ,$$

mit $kx = k_1x^1 + k_2x^2$. Dadurch läßt sich eine $\mathbb{T}^2$-Wirkung auf $C^\infty(\mathbb{S}^4)$ erklären als

$$\alpha_t(f_k(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}kx}) = f_k(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}k(x+t)}$$

und lineare Fortsetzung. Die $\mathbb{T}^2$-Wirkung auf $\mathbb{S}^4$ ist nicht frei, denn die Pole $\psi = 0,\pi$ sind Fixpunkte von $\mathbb{T}^2$, und zu jedem ψ sind die Kreise $\phi = 0, \frac{\pi}{2}$ fest unter einer $\mathbb{S}^1$-Untergruppe. Die Rieffel-Deformation definiert ein nichtkommutatives Produkt $\star_\theta$ auf $C^\infty(\mathbb{S}^4)$:

$$(f_k(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}kx}) \star_\Theta (g_l(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}lx}) = e^{-\pi\mathrm{i}k\Theta l} f_k(\phi,\psi)g_l(\phi,\psi)e^{\mathrm{i}(k+l)x} .$$

Es stellt sich heraus [13], daß die Isometrie $\alpha : \mathbb{T}^2 \to SO(T^*\mathbb{S}^4)$ nicht direkt auf dem Hilbert-Raum der Schnitte des Spinor-Bündels wirken kann, sondern einen Lift in die Spin-Gruppe erfordert. Es gibt eine zweifache Überlagerung $\pi : \tilde{\mathbb{T}}^2 \to \mathbb{T}^2$ durch einen weiteren Torus $\tilde{\mathbb{T}}^2$, mit $\pi(\pm 1) = 1$, und eine Wirkung $\tau : \tilde{\mathbb{T}} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, so daß $\tau_{\tilde{t}}(f\eta) = \alpha_{\pi(\tilde{t})}\tau_{\tilde{t}}\eta$. Seien $P_i\psi = \frac{d}{dh}(\tau_{he_i}\psi)|_{h=0}$ die infinitesimalen Generatoren der Wirkung von $\tilde{\mathbb{T}}^2$, dann ist $P_i(e^{ikx}\eta) = e^{ikx}(P_i + k_i)\eta$. Definieren wir $L(f)\eta := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{\mathrm{i}kx}e^{-\mathrm{i}\pi k\Theta P}\eta$, siehe [51], dann ist

$$\begin{aligned}
L(f)L(g)\eta &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{\mathrm{i}kx}e^{-\mathrm{i}\pi k\Theta P} g_l e^{\mathrm{i}lx}e^{-\mathrm{i}\pi l\Theta P}\eta \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^2} f_k g_l e^{\mathrm{i}(k+l)x}e^{-\mathrm{i}\pi k\Theta(P+l)}e^{-\mathrm{i}\pi l\Theta P}\eta \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^2} f_k g_l e^{\mathrm{i}(k+l)x}e^{-\mathrm{i}\pi k\Theta l}e^{-\mathrm{i}\pi(k+l)\Theta P}\eta \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} (f\star_\Theta g)_m e^{\mathrm{i}mx}e^{-\mathrm{i}\pi m\Theta P}\eta = L(f\star_\Theta g)\eta .
\end{aligned}$$

Ist $\mathcal{D}$ der Dirac-Operator zu einer unter α invarianten Metrik, dann kommutieren $\mathcal{D}$ und J mit τ und definieren eine isospektrale Deformation von $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$.

Die Konstruktion läßt sich auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen, die eine isometrische Torus-Wirkung tragen. Das besondere der Connes-Landi-Sphäre $\mathbb{S}^4_\Theta$ ist, daß sie algebraisch durch Projektoren definiert werden können.

Wir betrachten Projektoren $e = e^* = e^2 \in M_r(\mathcal{A})$ und die Chern-Charaktere

$$ch_n(e) = \lambda_n \mathrm{tr}\big((e-\tfrac{1}{2})\otimes \underbrace{e\otimes\cdots\otimes e}_{2n}\big) \in \mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes 2n} ,$$

mit $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{C}1$. Die $ch_n(e)$ definieren einen Zykel im (B,b)-Bikomplex, $B\ ch_n(e) = b\ ch_{n+1}(e)$. Es sei $\mathcal{A}_{m,r}$ die von den Komponenten $e_{ij} \in \mathcal{A}$ erzeugte Algebra, unter den Bedingungen $e = e^2 = e^*$ und $ch_n(e) = 0$ für $0 \leq n \leq m$. Über eine Darstellung in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ läßt sich eine C^*-Algebra $A_{m,r}$ definieren. Eine Darstellung $A_{2,4} \to C(\mathbb{S}^4)$ wird wie folgt erhalten:

Der Ansatz

$$e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 + z & q \\ q^* & 1_2 - z \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad z \in M_2(\mathcal{A}), \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

der $ch_0(e) = 0$ erfüllt, führt auf

$$\begin{aligned} e = e^* \quad &\Leftrightarrow \quad z = z^* \\ e^2 = e \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + qq^* = z^2 + q^*q = 1,\ zq = qz,\ zq^* = q^*z\ . \end{aligned}$$

Dann ist $z = z^* \in \mathcal{Z}[\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}]$ und $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha\bar{\beta} = \bar{\beta}\alpha$, sowie $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = \bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta = 1 - z^2$. Eine Lösung (wirklich die allgemeinste?) ist, daß alle $z, \alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ miteinander kommutieren. Die verbleibende Bedingung $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + z^2 = 1$ liefert die $\mathbb{S}^4$. Man zeigt, daß auch $ch_1(e) = 0$ gilt, und die Forderung $ch_2(e) = \omega$ (Volumenform) liefert die Geometrie der "runden" $\mathbb{S}^4$.

Die Bedingungen an den Chern-Charakter lassen sich auch durch $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\lambda\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ erfüllen mit $|\lambda| = 1$. Dann folgt $\alpha\beta = \lambda\beta\alpha$ und $\bar{\alpha}\beta = \bar{\lambda}\beta\bar{\alpha}$, was mit $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ gerade die Rieffel-Deformation wird. Dann ist

$$\begin{aligned} ch_1(e) &= \frac{1}{8}\mathrm{tr}_4\left(\begin{pmatrix} z & q \\ q^* & -z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} dz & dq \\ dq^* & -dz \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} dz & dq \\ dq^* & -dz \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{tr}_2\big(z\otimes(dq\otimes dq^* - dq^*\otimes dq) + q\otimes(dq^*\otimes dz - dz\otimes dq^*) + q^*\otimes(dz\otimes dq - dq\otimes dz)\big)\ . \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

$$\mathrm{tr}_2\big(dq\otimes dq^*\big) = \mathrm{tr}_2\big(dq^*\otimes dq\big) = d\alpha \otimes d\bar{\alpha} + d\beta \otimes d\bar{\beta} + d\bar{\alpha} \otimes d\alpha + d\bar{\beta} \otimes d\beta$$

und damit, da z diagonal ist, $\mathrm{tr}_2\big(z\otimes(dq\otimes dq^* - dq^*\otimes dq)\big) = 0$. Ebenso folgt $\mathrm{tr}_2\big(q\otimes dq^*\otimes dz - q^*\otimes dq\otimes dz\big) = 0$ und $\mathrm{tr}_2\big(-q\otimes dz\otimes dq^* + q^*\otimes dz\otimes dq\big) = 0$, also insgesamt $ch_1(e) = 0$. Die Rechnung für $ch_2(e)$ ist länglich; man findet

$$c = ch_2(e) = \frac{1}{32}\Big(z \otimes \Gamma_z + \alpha \otimes \Gamma_\alpha + \beta \otimes \Gamma_\beta + \bar{\alpha} \otimes \Gamma_{\bar{\alpha}} + \bar{\beta} \otimes \Gamma_{\bar{\beta}}\Big)\ ,$$

wobei $\Gamma_{z,\alpha,\beta,\bar{\alpha},\bar{\beta}} \in \overline{\mathcal{A}}^4$ in [12, §III, (20)-(24)] zu finden sind. Dort wird bemerkt, daß $bc = 0$ aus 600 Summanden besteht.

Über eine Rieffel-Deformation der $\mathbb{S}^7$ läßt sich ein deformiertes Hopf-Bündel $SU(2) \to \mathbb{S}^7_\Theta \to \mathbb{S}^4_\theta$ konstruieren. Details und weitere Anwendungen der deformierten Sphären sind in [35] zu finden.

13 Der Moyal-Raum

Der Moyal-Raum oder nichtkommutative $\mathbb{R}^d$ entsteht durch Rieffel-Deformation des $\mathbb{R}^d$ bezüglich der Translationswirkung der Gruppe $V = \mathbb{R}^d$ auf sich selbst:

$$(f \star_\Theta g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{dt\, ds}{(2\pi)^d}\, f(x + \tfrac{1}{2}\Theta t)\, g(x+s)\, e^{\mathrm{i}ts}\;, \qquad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\;.$$

Dann ist $\mathcal{A}_\Theta = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \star_\Theta)$ eine assoziative Algebra. Nach Variablentransformation $t \mapsto 2\pi t$ und $\Theta \mapsto \frac{\Theta}{2\pi}$ entsteht die Formel von Rieffel; da es im Gegensatz zum Torus gibt keine Unterschiede zwischen rationalen, irrationalen und diophantischen Θ gibt, bevorzugt die Literatur die obige Darstellung. Alternativ kann wie beim nichtkommutativen Torus mit den Fourier-Transformierten $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d}\, \hat{f}(k)\, e^{\mathrm{i}kx}$ gearbeitet werden. Unter Verwendung von $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{ds}{(2\pi)^d}\; e^{\mathrm{i}s(t-l)} = \delta(t-l)$ ergibt sich

$$(\widehat{f \star_\Theta g})(l) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d}\, \hat{f}(k)\hat{g}(l-k)\; e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}k\Theta l}\;.$$

Die Theorie der Moyal-Deformation wurde in [22, 49] entwickelt. In [18] findet man eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate sowie den Beweis, daß der Moyal-Raum ein nichtkompaktes spektrales Tripel ist. Zunächst gilt:

i) $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zu $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gibt es sogar $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $f = f_1 \star f_2$.

ii) Involution: $\overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f}$.

iii) Leibniz-Regel: $\partial_\mu (f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + f \star (\partial_\mu g)$.

iv) Spur: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} dx\; (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\; (g \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\; f(x)\, g(x)$

13.1 Die Oszillatorbasis

Es sei $d = 2N$ gerade und $\mathrm{rang}(\Theta) = d$. Dann kann eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^d$ gewählt werden, in der Θ die folgende Standardform hat:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & & & 0 \\ -\theta_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \theta_{\frac{d}{2}} \\ 0 & & & -\theta_{\frac{d}{2}} & 0 \end{pmatrix}\;, \qquad \theta_i \in \mathbb{R}\;.$$

Dann ist die Gauß-Funktion $e(x) = 2^{\frac{d}{2}} \exp\big(-\frac{1}{\theta_1}(x_1^2+x_2^2) - \cdots - \frac{1}{\theta_{\frac{d}{2}}}(x_{d-1}^2+x_d^2)\big)$ ein Projektor in $\mathcal{A}_\Theta$. Der Nachweis genügt für $d=2$:

$$\begin{aligned}
(e\star e)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{dt\,ds}{(2\pi)^2}\; 4e^{-\frac{1}{\theta}(x_1+\frac{\theta}{2}t_2)^2-\frac{1}{\theta}(x_2-\frac{\theta}{2}t_1)^2-\frac{1}{\theta}(x_1+s_1)^2-\frac{1}{\theta}(x_2+s_2)^2+\mathrm{i}t_1s_1+\mathrm{i}t_2s_2}\\
&= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{dt\,ds}{\pi^2}\; e^{-(t,s)A\binom{t}{s}+b^t\binom{t}{s}-\frac{2}{\theta^2}(x_1^2+x_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{4}b^tA^{-1}b-\frac{2}{\theta}(x_1^2+x_2^2)}\;,
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{4} & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\theta}{4} & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ -\frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{1}{\theta} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{1}{\theta}\end{pmatrix}\;,\qquad b = \begin{pmatrix} x_2\\ -x_1\\ -\frac{2x_1}{\theta}\\ -\frac{2x_2}{\theta}\end{pmatrix}\;.$$

Damit findet man $\det A = \frac{1}{4}$ und $b^tA^{-1}b = \frac{4}{\theta}(x_1^2+x_2^2)$, was $e\star e = e$ liefert.

Betrachtet werden die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2i-1}+\mathrm{i}x_{2i})\;,\qquad a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2i-1}-\mathrm{i}x_{2i})\;.$$

Dann gilt für Schwartz-Funktionen e,f in der Multipier-Algebra

$$\begin{aligned}
&a_i\star e = 0\;,\qquad e\star a_i^\dagger = 0\;,\qquad (a_i\star a_j^\dagger - a_j^\dagger\star a_i)\star f = \theta_i\delta_{ij}f\;,\\
&(a_i^\dagger\star a_j^\dagger - a_j^\dagger\star a_i^\dagger)\star f = 0 \qquad (a_i\star a_j - a_j\star a_i)\star f = 0\;.
\end{aligned}$$

Definiert man

$$f_{kl} := \Big(\prod_{i=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{k_i!l_i!\theta_i^{k_i+l_i}}}\Big)(a_1^\dagger)^{\star k_1}\star\cdots\star(a_{\frac{d}{2}}^\dagger)^{\star k_{\frac{d}{2}}}\star e\star(a_1)^{\star l_1}\star\cdots\star(a_{\frac{d}{2}})^{\star l_{\frac{d}{2}}}\;,$$

für $k,l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}$, dann gilt

$$f_{kl}\star f_{mn} = \delta_{lm}f_{kn}\;,\qquad \int_{\mathbb{R}^d} dx\; f_{mn}(x) = \sqrt{\det(2\pi\Theta)}\delta_{mn}\;,\qquad \overline{f_{kl}} = f_{lk}\;.$$

Die Entwicklung $f = \sum_{k,l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}} c_{kl}f_{kl}$ liefert einen Isomorphismus von Fréchet-Algebren zwischen $\mathcal{A}_\Theta$ und der Matrix-Algebra der schnell fallenden Folgen (c_{kl}). Dabei ist $(c_{kl})(c'_{mn}) = (d_{kn})$ mit $d_{kn} = \sum_{l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}} c_{kl}c'_{ln}$, und die Fréchet-Topologie wird über die Halbnormen

$$p_n((c)) = \sup_{|m|\leq n}\Big(\sum_{k,l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}}\Big|\theta^{2m}(k+\tfrac{1}{2})^m(l+\tfrac{1}{2})^m|c_{kl}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

induziert. Dabei ist m ein Multiindex mit $\theta^m = \prod_{i=1}^{\frac{d}{2}} \theta_i^{m_i}$. Über die Normen

$$\|f\|_{s,t}^2 := \sum_{k,l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}} \theta^{s+t}(k+\tfrac{1}{2})^s(l+\tfrac{1}{2})^t|c_{kl}|^2\;, \qquad s,t\in\mathbb{R}^{\frac{d}{2}}$$

und Abschluß lassen sich verschiedene Sobolov-Räume $\mathcal{G}_{s,t}$ erklären. Es gilt

$$\|f\star g\|_{s,t} \leq \|f\|_{s,q}\|g\|_{r,t} \qquad \text{falls } q+r\geq 0\;.$$

Somit ist $\mathcal{G}_{t,-t}$ für jedes $t\in\mathbb{R}^{\frac{d}{2}}$ eine Banach-Algebra. Weiter ist $\mathcal{G}_{0,0} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ein Hilbert-Raum, und $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}}f_{kl}\;:\;k,l\in\mathbb{N}^{\frac{d}{2}}\}$ ist eine Orthonormalbasis. Es gilt $\mathcal{A}_\Theta = \bigcap_{s,t}\mathcal{G}_{s,t}$, und daraus ergibt sich, daß $\mathcal{A}_\Theta$ eine Fréchet-prä-C^*-Algebra ist.

13.2 Der Moyal-Raum als nichtkompaktes spektrales Tripel

Nach offensichtlicher Abänderung der Axiome ist $\mathcal{A}_\Theta$ zusammen mit dem undeformierten Hilbert-Raum der L^2-Schnitte des Spinorbündels über $\mathbb{R}^4$ und dem Dirac-Operator $\mathcal{D} = \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu$ ein nichtkompaktes spektrales Tripel [18]. Die wichtigste Änderung betrifft die Dimension: man fordert, daß für $f\in\mathcal{A}_\Theta$ der Operator $L_\Theta(f)(\mathcal{D}^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ kompakt ist mit n-tem charakteristischen Wert von Ordnung $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{d}})$. Der tatsächliche Beweis unter Verwendung von Methoden aus der Streutheorie ist kompliziert.

Die Formulierung der Orientierbarkeit erfordert eine Unitalisierung von $\mathcal{A}_\Theta$. Die naheliegende Definition ist Lemma 2.1 in [15]. Man setzt

$$\mathcal{B} = \{b\in\mathcal{A}_\Theta''\;:\;b\in\mathrm{dom}(\delta^k)\text{ für alle }k\}\;.$$

Es zeigt sich, daß $\mathcal{B} = \{f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)\;:\;\partial^\alpha f \text{ beschränkt für alle } \alpha\in\mathbb{N}^d\}$. Es ist wieder eine Fréchet-prä-C^*-Algebra mit den Halbnormen $q_r(f) = \max_{|\alpha|\leq r}\|\partial^\alpha f\|_\infty$. Dazu zeigt man $q_s(f\star g)\leq C_{rs}q_r(f)q_r(g)$ für $r\geq s+d+2$, so daß $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter $\star$ ist. Die Regularität der Funktionen $f\in\mathcal{B}$ folgt aus der Formel am Ende von Abschnitt 6.1,

$$\begin{aligned}&\tilde{\delta}^m L_\Theta(f)\\ &= \sum_{k=0}^m(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{\pi^m}\int_0^\infty\Big(\prod_{i=1}^k\frac{1}{\langle\mathcal{D}\rangle^2+\lambda_i}\Big)((\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)^{m+k}L_\Theta(f))\langle\mathcal{D}\rangle^{-m}\prod_{j=1}^m\frac{d\lambda_j\,\sqrt{\lambda_j}\langle\mathcal{D}\rangle}{(\langle\mathcal{D}\rangle^2+\lambda_j)^2}\end{aligned}$$

zusammen mit $(\mathrm{ad}\,\mathcal{D}^2)(L_\Theta(f)) = L_\Theta(\Delta f) - 2L_\Theta(\partial^\mu f)\partial_\mu$.

Es gilt $u_\mu = e^{\mathrm{i}x^\mu}\in\mathcal{B}$, so daß die zum nichtkommutativen Torus analoge Definition des Hochschild-Zykels

$$c = \frac{\mathrm{i}^{\frac{d(d-3)}{2}}}{d!}\sum_{\beta\in S_d}\epsilon(\beta)(u_{\beta(1)}\star_\Theta\cdots\star_\Theta u_{\beta(d)})^{-1}\otimes u_{\beta(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\beta(d)}\in Z_d(\mathcal{B},\mathcal{B})$$

das Orientierungs-Axiom liefert. Ebenso liefert das J des $\mathbb{R}^d$ die reelle Struktur. Die Endlichkeits-Bedingung erfordert eine Modifikation der Definition projektiver Moduln im nichtkompakten Fall zu $\mathcal{E} = e\mathcal{A}_1^n$ mit $\mathcal{A}_1$ nichtunital und $e = e^* = e\star e \in M_n(\mathcal{B})$. Es zeigt sich, daß die Hermitesche Struktur $(\,|\,) : \mathcal{H}_\infty \times \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{A}_1$ Werte nicht in $\mathcal{A}_\Theta$ annimmt, sondern in einer größeren Algebra $\mathcal{A}_1 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \;:\; \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d\}$ mit $\mathcal{A}_\Theta \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}$. Auch $\mathcal{A}_1$ ist nicht-unitale Fréchet-prä-C^*-Algebra.

Die Spektralwirkung für den Moyal-Raum wurde in [19] berechnet. Wegen der Nichtkompaktheit der Resolvente ist $\mathrm{Tr}(e^{-t\mathcal{D}_A^2})$ nicht erklärt, so daß die regularisierte Spur $\mathrm{Tr}(L_\Theta(f)e^{-t\mathcal{D}_A^2})$ berechnet werden muß.

13.3 Quantenfeldtheorie auf dem Moyal-Raum

Ursprünglich hatte man von Quantenfeldtheorien auf nichtkommutativen Räumen erwartet, daß sie frei von Singularitäten sind. Filk zeigte 1996, daß das nicht so ist [17]. 1999 wurde für den nichtkommutativen 4-Torus [33] und den 4-dimensionalen Moyal-Raum [39] gezeigt, daß Yang-Mills-Theorie in Einschleifenordnung renormierbar ist, d.h. daß sich die Singularitäten konsistent vermeiden lassen. Jedoch zeigten sich wenig später ernste Probleme [41] in höherer Schleifenordung (UV/IR-Mischung).

Die Lösung des UV/IR-Problems für skalare Feldtheorien auf dem 4-dimensionalen Moyal-Raum besteht in einer durch das Modell dynamisch generierten Deformation des Laplace-Operators [24]. Man findet die folgenden Matrix-Elemente $\Delta_{mn;kl} := \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Theta)}}\int_{\mathbb{R}^d} dx \;\; f_{mn}(x)(\Delta f_{kl})(x)$ des Laplace-Operators $\Delta = -\partial^\mu\partial_\mu$ in der Matrix-Basis (f_{kl}), zunächst mit $\Omega = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\Omega}_{\substack{m^1\\m^2}\substack{n^1\\n^2};\substack{k^1\\k^2}\substack{l^1\\l^2}} &= \big(\tfrac{2+2\Omega^2}{\theta}(m^1{+}n^1{+}m^2{+}n^2{+}2)\big)\delta_{n^1k^1}\delta_{m^1l^1}\delta_{n^2k^2}\delta_{m^2l^2} \\
&\quad - \tfrac{2-2\Omega^2}{\theta}\big(\sqrt{k^1l^1}\,\delta_{n^1+1,k^1}\delta_{m^1+1,l^1} + \sqrt{m^1n^1}\,\delta_{n^1-1,k^1}\delta_{m^1-1,l^1}\big)\delta_{n^2k^2}\delta_{m^2l^2} \\
&\quad - \tfrac{2-2\Omega^2}{\theta}\big(\sqrt{k^2l^2}\,\delta_{n^2+1,k^2}\delta_{m^2+1,l^2} + \sqrt{m^2n^2}\,\delta_{n^2-1,k^2}\delta_{m^2-1,l^2}\big)\delta_{n^1k^1}\delta_{m^1l^1}\;.
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung ist $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ gesetzt. Die Tatsache, daß Δ keine kompakte Resolvente hat, zeigt sich im asymptotischen Verhalten der Matrixelemente der Resolvente und kann direkt mit dem UV/IR-Problem in Verbindung gebracht werden. Führt man aber den Parameter $0 < \Omega^2 \neq 1$ ein, so wird die Resolvente kompakt, und letztendlich das Modell konsistent. Im einzelnen analysiert man die Resolvente durch Diagonalisierung

$$\begin{aligned}
\Delta^{\Omega}_{\substack{m^1\\m^2}\substack{m^1+\alpha^1\\m^2+\alpha^2};\substack{l^1+\alpha^1\\l^2+\alpha^2}\substack{l^1\\l^2}} &= \sum_{y^1,y^2=0}^{\infty} U^{(\alpha^1)}_{m^1y^1}U^{(\alpha^2)}_{m^2y^2}\big(\tfrac{4\Omega}{\theta}(2y^1{+}2y^2{+}\alpha^1{+}\alpha^2{+}2)\big)U^{(\alpha^1)}_{y^1l^1}U^{(\alpha^2)}_{y^2l^2}\;, \\
U^{(\alpha)}_{ny} &= \sqrt{\binom{\alpha+n}{n}\binom{\alpha+y}{y}}\;\Big(\frac{1-\Omega}{1+\Omega}\Big)^{n+y}\Big(\frac{2\sqrt{\Omega}}{1+\Omega}\Big)^{\alpha+1}\;{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n,-y\\1+\alpha\end{matrix}\Big|\frac{4\Omega}{(1+\Omega)^2}\Big)\;.
\end{aligned}$$

Dabei sind die $\alpha_i \in \mathbb{N}$ festgehaltene Indizes der unabhängigen Sektoren, und die Matrix-Elemente der unitären Matrizen $(U^{(\alpha)}_{ny})$ sind orthogonale Meixner-Polynome. Damit ist $sp(\Delta^\Omega) = \mathbb{N} + \frac{d}{2}$, und der n-te Eigenwert hat Vielfachheit $\binom{n+d-1}{n}$.

Zurückübersetzt in Funktionen entspricht der Ω-Term dem Operator $(\Delta^\Omega f)(x) = (\Delta f)(x) + 4\Omega^2\|\Theta^{-1}x\|^2 f(x)$, d.h. dem Schrödinger-Operator des harmonischen Oszillators. Kompaktheit der Resolvente ist dann klar. Das Auftreten des Oszillatorpotentials kann als Folge der Langmann-Szabo-Dualität [36] verstanden werden: Gegeben sei eine gerade Anzahl N von Funktionen f_i mit $\mathbb{Z}_2$-modifizierter Fourier-Transformation $\hat{f}_a(p_a) = \int d^4x\ \mathrm{e}^{(-1)^a \mathrm{i} p_{a,\mu} x_a^\mu} f_a(x_a)$. Dann gilt z.B. für $N = 4$ und reellwertige Funktionen

$$
\begin{aligned}
\int d^4x\ (\phi \star \phi \star \phi \star \phi)(x) &= \int \Big(\prod_{a=1}^4 d^4x_a\Big) \Big(\prod_{a=1}^4 f_a(x_a)\Big) V(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \int \Big(\prod_{a=1}^4 \frac{d^4p_a}{(2\pi)^4}\Big) \Big(\prod_{a=1}^4 \hat{f}_a(p_a)\Big) \hat{V}(p_1, p_2, p_3, p_4)\ ,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\hat{V}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 + p_3 - p_4)\ \cos\Big(\tfrac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}(p_{1,\mu}p_{2,\nu} + p_{3,\mu}p_{4,\nu})\Big)\ , \\
V(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\pi^4 \det\Theta}\ \delta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\ \cos\Big(2(\Theta^{-1})_{\mu\nu}(x_1^\mu x_2^\nu + x_3^\mu x_4^\nu)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Somit ist das integrierte Produkt invariant unter kombinierter Fourier-Transformation und Ersetzung

$$
\hat{\phi}(p) \leftrightarrow \pi^2 \sqrt{|\det\Theta|}\ \phi(x)\ , \qquad\qquad p_\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu := 2(\Theta^{-1})_{\mu\nu} x^\nu\ ,
$$

Diese Dualitäts-Transformation vertauscht jedoch

$$
\int d^4x\ f_1(x)\,(-\partial^\mu\partial_\mu f_2)(x) \qquad \leftrightarrow \qquad \int d^4x\ f_1(x)\,(\tilde{x}^\mu\tilde{x}_\mu f_2)(x)\ .
$$

Die Ersetzung des Laplace-Operators durch den Schrödinger-Operator erhält (bis auf Skalierung) die Invarianz unter Langmann-Szabo-Dualität.

Die Konstruktion eines spektralen Tripels zu $\mathcal{D}^2 = \Delta + \omega^2 x^\mu x_\mu$ ist aktueller Forschungsgegenstand.

Literatur

[1] A. H. Chamseddine and A. Connes, “The spectral action principle,” Commun. Math. Phys. **186** (1997) 731 [arXiv:hep-th/9606001].

[2] A. H. Chamseddine, A. Connes and M. Marcolli, “Gravity and the standard model with neutrino mixing,” Adv. Theor. Math. Phys. **11** (2007) 991 [arXiv:hep-th/0610241].

[3] A. H. Chamseddine and A. Connes, “Why the Standard Model,” J. Geom. Phys. **58** (2008) 38 [arXiv:0706.3688 [hep-th]].

[4] A. Connes, “Géométrie non commutative,” Inter éditions, Paris 1990.

[5] A. Connes and J. Lott, “The Metric aspect of noncommutative geometry,” in: *New symmetry principles in quantum field theory* pp 53–93, proc. Cargese 1991

[6] A. Connes and J. Lott, “Particle models and noncommutative geometry (expanded version),” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B** (1991) 29.

[7] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego (1994)

[8] A. Connes, “Noncommutative geometry and reality,” J. Math. Phys. **36**, 6194 (1995).

[9] A. Connes, “Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry,” Commun. Math. Phys. **182** (1996) 155 [arXiv:hep-th/9603053].

[10] A. Connes & H. Moscovici, “The local index formula in noncommutative “geometry,” Geom. Funct. Anal. **5** (1995) 174–243.

[11] A. Connes, “A short survey of noncommutative geometry,” J. Math. Phys. **41** (2000) 3832 [arXiv:hep-th/0003006].

[12] A. Connes & G. Landi, “Noncommutative manifolds: The instanton algebra and isospectral deformations,” Commun. Math. Phys. **221** (2001) 141 [arXiv:math/0011194].

[13] A. Connes and M. Dubois-Violette, “Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples,” arXiv:math/0107070.

[14] A. Connes, “Noncommutative geometry and the standard model with neutrino mixing,” JHEP **0611** (2006) 081 [arXiv:hep-th/0608226].

[15] A. Connes, “On the spectral characterization of manifolds,” arXiv:0810.2088 [math.OA].

[16] M. Dubois-Violette, J. Madore and R. Kerner, "Classical bosons in a noncommutative geometry," Class. Quant. Grav. **6** (1989) 1709.

[17] T. Filk, "Divergencies in a field theory on quantum space," Phys. Lett. B **376** (1996) 53.

[18] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker and J. C. Várilly, "Moyal planes are spectral triples," Commun. Math. Phys. **246** (2004) 569 [arXiv:hep-th/0307241].

[19] V. Gayral and B. Iochum, "The spectral action for Moyal planes," J. Math. Phys. **46** (2005) 043503 [arXiv:hep-th/0402147].

[20] V. Gayral, B. Iochum and D. V. Vassilevich, "Heat kernel and number theory on NC-torus," Commun. Math. Phys. **273** (2007) 415 [arXiv:hep-th/0607078].

[21] P. B. Gilkey, "Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer "index theorem," Publish or Perish (1984)

[22] J. M. Gracia-Bondia and J. C. Varilly, "Algebras of distributions suitable for phase space quantum mechanics. 1," J. Math. Phys. **29** (1988) 869.

[23] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly & H. Figueroa, "Elements Of Noncommutative Geometry," Birkhäuser, Boston (2001).

[24] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Renormalisation of ϕ^4-theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$ in the matrix base," Commun. Math. Phys. **256** (2005) 305 [arXiv:hep-th/0401128].

[25] R. S. Hamilton, "The inverse function theorem of Nash and Moser," Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982) 65–222.

[26] F. Hirzebruch & W. Scharlau, "Einführung in die Funktionalanalysis," Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford (1996).

[27] W. Kalau and M. Walze, "Gravity, noncommutative geometry and the Wodzicki residue," J. Geom. Phys. **16** (1995) 327. [arXiv:gr-qc/9312031].

[28] D. Kastler, "A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in noncommutative geometry. I. and II," Rev. Math. Phys. **5** (1993) 477.

[29] D. Kastler, "A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in noncommutative differential geometry. III. State of the art," Rev. Math. Phys. **8** (1996) 103.

[30] D. Kastler and T. Schücker, "A detailed account of Alain Connes' version of the standard model. IV," Rev. Math. Phys. **8** (1996) 205 [arXiv:hep-th/9501077].

[31] M. Khalkhali, "Very Basic Noncommutative Geometry," arXiv:math/0408416 [math.KT].

[32] T. Krajewski, "Classification of finite spectral triples," J. Geom. Phys. **28** (1998) 1 [arXiv:hep-th/9701081].

[33] T. Krajewski and R. Wulkenhaar, "Perturbative quantum gauge fields on the noncommutative torus," Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1011 [arXiv:hep-th/9903187].

[34] G. Landi, "An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry," Lecture Notes in Physics m51, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1997) [arXiv:hep-th/9701078].

[35] G. Landi and W. van Suijlekom, "Noncommutative bundles and instantons in Tehran," in: *An invitation to Noncommutative geometry*, eds. M.Khalkhali and M. Marcolli, pp. 275–353, World Scientific (2008) [arXiv:hep-th/0603053].

[36] E. Langmann and R. J. Szabo, "Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces," Phys. Lett. B **533**, 168 (2002) [arXiv:hep-th/0202039].

[37] S. Lazzarini and T. Schücker, "A farewell to unimodularity," Phys. Lett. B **510** (2001) 277 [arXiv:hep-th/0104038].

[38] J. Madore, "The fuzzy sphere," Class. Quant. Grav. **9** (1992) 69.

[39] C. P. Martin and D. Sanchez-Ruiz, "The one-loop UV divergent structure of U(1) Yang-Mills theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$," Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 476 [arXiv:hep-th/9903077].

[40] R. Meyer, "Real spectral triples and charge conjugation," in: *Noncommutative geometry and the standard model of elementary particle physics* (eds. F. Scheck, H. Upmeier and W. Werner), pp 11–20, Springer-Verlag 2002

[41] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," JHEP **0002** (2000) 020 [arXiv:hep-th/9912072].

[42] M. Paschke and A. Sitarz, "Discrete Sprectral Triples And Their Symmetries," J. Math. Phys. **39**, 6191 (1998).

[43] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis," Academic Press (1980).

[44] A. Rennie, "Smoothness and locality for nonunital spectral triples", *K*-Theory **28** (2003) 127–165.

[45] A. Rennie and J. C. Várilly, "Reconstruction of Manifolds in Noncommutative Geometry," arXiv:Math/0610418.

[46] M. A. Rieffel, "Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$." Mem. Amer. Math. Soc. **506** (1993).

[47] T. Schücker, "Forces from Connes' geometry," Lect. Notes Phys. **659** (2005) 285 [arXiv:hep-th/0111236].

[48] R. G. Swan, "Vector Bundles and Projective Modules," Trans. Am. Math. Soc. **105** (1962) 264–277.

[49] J. C. Varilly and J. M. Gracia-Bondia, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. II. Topologies on the Moyal algebra," J. Math. Phys. **29** (1988) 880.

[50] J. C. Varilly, "An introduction to noncommutative geometry," European Math. Soc. Publishing House (2006) [arXiv:physics/9709045].

[51] J. C. Várilly, "Dirac operators and spectral geometry," Lecture at Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences, Warsaw (2006)

[52] D. Werner, "Funktionalanalysis," Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2005).