Zusatzaufgaben zur Mathematik für Physiker I

Die Aufgaben werden direkt in den Übungen am 22./23.12. besprochen. Es ist keine Abgabe erforderlich

---

Aufgabe 1. (Fibonacci-Zahlen)
Es sei $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
a) Zeigen Sie:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) . \tag{1}$$

b) Für $n \geq 1$ sei $y_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Geben Sie y_1 und eine Rekursionsformel an, die y_{n+1} durch y_n ausdrückt. Folgern Sie: $1 \leq y_n \leq 2$.

c) Zeigen Sie unter Verwendung von (1): Es gibt Konstanten $C, M \in \mathbb{R}$ mit $M > 1$, so daß $\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 \right| \leq \frac{C}{M^n}$ für alle $n \geq 1$.

d) Zeigen Sie dann: $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ ist Cauchy-Folge, und berechnen Sie den Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für $a_0 = 0$ und $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$ gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

Aufgabe 4. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, d.h. es gebe ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq M \; \forall \, n \geq 1$. Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für $|x| < 1$.

b) Ist $a_1 \neq 0$, so hat $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ auf $\left] -\frac{|a_1|}{2M}, \frac{|a_1|}{2M} \right[$ nur die triviale Nullstelle $x = 0$.