Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 12.11.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Begründen Sie, weshalb die in a),b),c) definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ konvergent bzw. divergent sind, und bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert:

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\binom{n}{k}\,, \qquad k\in\mathbb{N}$$
$$\text{b)}\quad a_n = \Big(\frac{12+5\mathrm{i}}{13}\Big)^n$$
$$\text{c)}\quad a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}x^k}\,, \qquad x\in\mathbb{R}_+^\times$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\,, \qquad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n}\Big)\,.$$

Aufgabe 3. Für $x\in\mathbb{R}_+^\times$ und beliebiges $y\in\,]0,\frac{2}{x}[$ sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0=y$ und $a_{n+1}=2a_n-xa_n^2$.

i) Zeigen Sie: $a_n\in\,]0,\frac{1}{x}]$ für alle $n\in\mathbb{N}^\times$.

ii) Zeigen Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist monoton wachsend.

iii) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}a_n$.

iv) Geben Sie a_1,a_2,a_3 an für $x=7$ und $y=\frac{1}{10}$.

Aufgabe 4. (Berechnung von $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n$ für $r\in\mathbb{Q}$)

i) Zeigen Sie, daß für $p\in\mathbb{N}^\times$ die Folge $\Big(\big(1+\frac{p}{n}\big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ monoton wachsend und beschränkt ist, und berechnen Sie den Grenzwert.

ii) Zeigen Sie, daß für $p,q\in\mathbb{N}^\times$ die Folge $\Big(\sqrt[q]{\big(1+\frac{p}{n}\big)^n}\Big)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ monoton wachsend und beschränkt ist, und berechnen Sie den Grenzwert.
Zeigen Sie, daß die Folge $\Big(\big(1+\frac{p}{qn}\big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ den gleichen Grenzwert hat.

iii) Zeigen Sie, daß für $p,q\in\mathbb{N}^\times$ die für $n>\frac{p}{q}$ definierte Folge $\Big(\big(1-\frac{p}{qn}\big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N},n>\frac{p}{q}}$ konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert.