Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 26.11.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Man bestimme die durch $f = q \cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(g)$ definierten Polynome q, r für

a) $f(z) = (2+\mathrm{i})z^3 + (3+2\mathrm{i})z^2 + (2+2\mathrm{i})z$, $\qquad g(z) = (2+\mathrm{i})z - 1$

b) $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, $\qquad g(z) = (1-\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}z + 1$

Dabei sind die Koeffizienten von z^k in q, r als komplexe Zahlen der Form $\alpha + \mathrm{i}\beta$ zu schreiben!

Aufgabe 2.
a) Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}^\times$ sei $f(z) = (z-\alpha_1)^{\nu_1} \cdots (z-\alpha_n)^{\nu_n}$ ein Polynom vom Grad $\nu_1 + \cdots + \nu_n$.
Beweisen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte Koeffizienten $b_{k,j_k} \in \mathbb{C}$ mit $k = 1, \dots, n$ und $j_k = 1, \dots \nu_k$, so daß für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gilt

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{\nu_k} \frac{b_{k,j_k}}{(z-\alpha_k)^{j_k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_{k,1}}{(z-\alpha_k)^1} + \frac{b_{k,2}}{(z-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{b_{k,\nu_k}}{(z-\alpha_k)^{\nu_k}} \right) .$$

(Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung.)

b) Man berechne die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{f(z)}$ für $f(z) = (z-1)(z-2)^2(z-3)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ $\qquad$ b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}$, $\quad k \in \mathbb{N}$

c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$ $\qquad$ d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n!}}{2^n} z^n$

Aufgabe 4. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. Beweisen Sie:

a) Der Konvergenzradius von f ist ∞.

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $2f(z) \cdot f(z) = f(2z) + 1$.

Hinweis: Man verwende $2 = 1^{2k} + (-1)^{2k}$ und $0 = 1^{2k+1} + (-1)^{2k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$.