Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 17.12.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|v\| = \|w\| \iff \langle v - w, v + w\rangle = 0$.

(b) $\|v - w\| = \|v + w\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(c) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(d) Für $w \neq v$ gilt: $\left\| v - 2\frac{\|v\|^2}{\|v - w\|^2}(v - w)\right\| = \|v\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Abbildungen $N_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ definiert eine Norm? (Begründung erforderlich)

a) $N_1((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}$,

b) $N_2((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{|x_1 - 2x_2| + |x_2 - 2x_3| + |x_3 - 2x_1|}$,

c) $N_3((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2}$,

d) $N_4((x_1, x_2, x_3)) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_3|}\right)^2$

Aufgabe 3. a) Es sei X eine nichtleere Menge und $x, y \in X$. Zeigen Sie:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

definiert einen Abstand auf X.

b) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Zeigen Sie:

$$d'(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)}$$

definiert einen weiteren Abstand auf X.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß für $a, b \geq 0$ gilt $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+a+b} \leq 1$.

Aufgabe 4. a) Geben Sie eine Familie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Intervalle $I_n \subset \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_n = [0, 1]$ abgeschlossen ist.

b) Geben Sie eine Familie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $I_n \subset \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcup_{i=0}^{\infty} I_n =]0, 1[$ offen ist.