Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 14.1.10, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. a) Es sei $a \in \mathbb{R}_+^\times \setminus \{1\}$. Zeigen Sie: Die durch $f(x) = a^x$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$. Diese sei mit $f^{-1}(y) =: \log_a y$ bezeichnet. Zeigen Sie: $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

b) Leiten Sie eine Reihendarstellung für $\ln \frac{1+x}{1-x}$ her und zeigen Sie:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3(2k+1)9^k} \;, \qquad \ln 3 = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{3(2k+1)9^k} + \frac{2}{5(2k+1)25^k} \Big) \;,$$

$$\ln 5 = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{4}{3(2k+1)9^k} + \frac{2}{9(2k+1)81^k} \Big) \;.$$

c) Diese Teilaufgabe erfordert einen Taschenrechner o.ä. Approximieren Sie $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ in b) durch endliche Summen mit $k \in \{0, 1\}$ und geben Sie mit dieser Genauigkeit die ersten 3 Nachkommastellen von $\log_{10} 3$ an.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in]-1, 1[$ gilt

a) $\sin(2x) = 2 \sin x \; \cos x \;, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \;,$

b) $\operatorname{arsinh} x = \ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big) \;, \qquad \operatorname{artanh} z = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+z}{1-z} \;,$

c) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) \;.$

Bemerkung: Durch Wahl von $x = y = \frac{1}{5}$ in c) erhält man $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119} = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{1}{239}$.

Aufgabe 3. a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren Polynome T_n und U_n vom Grad n, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(nx) = T_n(\cos x) \;, \qquad \sin(nx) = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x) \;.$$

b) Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} T_{n+1}(y) &= 2yT_n(y) - T_{n-1}(y) \;, \qquad & T_0(y) = 1 \;,\; T_1(y) = y \;, \\ U_{n+1}(y) &= 2yU_n(y) - U_{n-1}(y) \;, \qquad & U_0(y) = 1 \;,\; U_1(y) = 2y \;. \end{aligned}$$

c) Geben Sie $\sin(5x)$ und $\cos(3x)$ in dieser Form an.

b.w.

Aufgabe 4 Zeigen Sie:
a) Die durch $f(x) = (\cos x, \sin x)$ definierte Abbildung $f : [0, 2\pi[\to S^1$ ist bijektiv und (in jedem Punkt) stetig, aber die damit existierende Umkehrabbildung $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi[$ ist in $1 \in S^1$ nicht stetig.

b) Es gibt keine bijektive stetige Abbildung $f : [0, 2\pi[\to S^1$ mit stetiger Umkehrabbildung.

Bemerkung: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heißt *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Zwei metrische Räume X, Y heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt. Die Aufgabe zeigt also: S^1 und $[0, 2\pi[$ sind nicht homöomorph.