Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 28.1.10, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 13

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\sqrt{1+x^2}-\cos x} \\ \text{b)} & \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \\ \text{c)} & \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x \\ \text{d)} & \lim\limits_{x\to \infty} \left(\cosh x\right)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Hinweis: Gegebenenfalls ist die Regel von de l'Hospital mehrfach anzuwenden, oder die Funktionen sind zunächst mittels Exponential- bzw Logarithmusfunktion umzuschreiben.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Lage aller Nullstellen, lokalen Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\;, \qquad x \in \mathbb{R}\;.$$

Bei welchen lokalen Extrema handelt es sich um lokale Maxima, bei welchen um lokale Minima?

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}^\times$ seien die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ jeweils n-mal differenzierbar auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktion $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar auf I, und für alle $x \in I$ gilt

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\;.$$

Aufgabe 4 a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 4. Ordnung der Funktion $f(x) = e^{\sin x}$ in $x = 0$.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion $f(x) = \sqrt{4+\cos x}$ in $x = \frac{\pi}{2}$.