Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Die Klausur wird aus zwei Teilen bestehen:

- Im Teil A, den es in der Probeklausur nicht gibt, wird eine Auswahl grundlegender Definitionen und Sätze abgefragt.
- Teil B sind Aufgaben, die mit denen der Probeklausur vergleichbar sind. Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.

Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen.

Teil B

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+n^2)}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x+x^2} - \sqrt{x^2+x})$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x \tan x}$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^n}{(2n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^n \frac{z^n}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n^2)}}{n^2}$

Aufgabe 3. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: (v_1, v_2, v_3) ist Basis des $\mathbb{R}^3$.
b) Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $w = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i$
c) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_3)$?

Aufgabe 4. Durch $x_0 := 2$ und $x_{n+1} := \dfrac{15 - 4x_n^2 + x_n^4}{4x_n}$ für $n \geq 0$ werde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$

Aufgabe 5. Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nehme jeden Funktionswert genau zweimal an. Zeigen Sie: f ist nicht stetig.

Aufgabe 6. Es sei $f(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Handelt es sich um lokale Miniuma oder lokale Maxima?

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 3. Ordnung von f im Punkt $a = 0$.