

Vertexalgebren

Seminar zur konformen Feldtheorie

PD Dr. Christian Voigt

Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar

Markus Lange

13. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Formale Distributionen	2
2	Lokalität und normale Ordnung	8
3	Vertex-Superalgebra	11
	Literatur	14

Zur Motivation des Begriffs einer Vertexalgebra werden wir kurz in die mathematische Formulierung einer 2-dimensionalen konformen Feldtheorie einsteigen. Eine detaillierte Beschreibung geht weit über den Rahmen dieses Vortrags hinaus.

Betrachteten wir ein Quadruple $(V, Y, \mathbf{1}, D)$, bestehend aus

- einem linearen Raum V mit einem von Null verschiedenen Vektor $\mathbf{1} \in V$,
- einem Endomorphismus $D : V \rightarrow V$ mit $D\mathbf{1} = 0$,
- einer linearen injektiven Abbildung $Y : V \rightarrow \mathcal{F}(V)$ die für alle $a, b \in V$ folgende Eigenschaften besitzt:
 - Lokalität: $Y(a, z), Y(b, w)$ sind lokal zueinander,
 - Erzeugung: $Y(a, z)\mathbf{1} = a + \mathcal{O}(z)$,
 - Translations Kovarianz: $[D, Y(a, z)] = \partial Y(a, z)$.

Hierbei sei $\mathcal{F}(V)$ der Raum der Felder über V .

Die obigen Axiome stellen gerade die mathematische Formulierung einer 2-dimensionalen konformen Feldtheorie da.

Andererseits ist $(V, \mathbf{1})$ eine Vertexalgebra (die paritätserhaltende Abbildung muss passend gewählt werden) die per Definition die obigen Axiome erfüllt.

Somit kann man konforme Feldtheorien mit Hilfe von Vertexalgebren effektiv formulieren, den z.B. ist die Assoziativität der Operator-Produkt-Entwicklung der CFT bereits in der Assoziativität der Vertexalgebra kodiert.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass Vertexoperatoren zuerst in der Stringtheorie eingesetzt wurden um die Ausbreitung von String Zuständen zu beschreiben.

Aus mathematischer Sicht wurden sie erst später durch Borcherds eingeführt (siehe [BORC]).

§1 Formale Distributionen

Sei R ein Vektorraum über \mathbb{C} und $z = \{z_1, \dots, z_n\}$ eine Menge von Unbestimmten.

Definition 1.1. 1. Eine formale Distribution ist eine formale Reihe

$$A(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} A_{j_1, \dots, j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$$

mit $A_j \in R$

Der Vektorraum der formalen Distributionen sei $R\left[[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]\right]$ oder kurz $R[[z^{\pm}]]$.

2. Der Raum der Laurent-Polynome ist definiert als

$$R[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] = \{A \in R[[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]] \mid \exists k, l : A_j = 0 \text{ au\ss}er k \leq j \leq l\}$$

Bemerkung: $i \leq j \iff i_v \leq j_v$ für alle $v = 1, \dots, n$.

3. Der Raum der formalen Potenzreihen ist definiert als

$$R[[z_1, \dots, z_n]] = \{A : A = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} A_{j_1, \dots, j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}\}$$

Bemerkung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

4. Der Raum der formalen Laurent-Reihen ist gegeben durch

$$R((z)) = \{A \in R[[z^{\pm}]] \mid \exists k \in \mathbb{Z} \forall j \in \mathbb{Z} : j < k \Rightarrow A_j = 0\}$$

Für $z = \{z_1, \dots, z_n\}$ gilt:

$$R[z^{\pm}] \subset R((z)) \subset R[[z^{\pm}]] \supset R[[z]]$$

Bemerkung: Das normale Cauchy Produkt für Potenzreihen

$$AB(z) = A(z)B(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} A_i B_{j-i} \right) z^j$$

ist für formale Distributionen im Allgemeinen nicht definiert.

Aber für $A, B \in R[[z^{\pm}]]$ gilt:

1. A, B formale Laurent-Reihe, dann ist $AB(z)$ wohldefiniert.
2. B ist formales Laurent-Polynom, dann ist $AB(z)$ wohldefiniert.

Außerdem ist $A(z)B(w) \in R[[z^{\pm}, w^{\pm}]]$ immer wohldefiniert.

Von jetzt an sei $z = z_1$, also $(z^{\pm}) := (z_1, z_1^{-1})$

Definition 1.2. Das Residuum der formalen Distribution $A \in R[[z^{\pm}]]$,

$$A(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j z^j$$

ist definiert als

$$\text{Res}_z A(z) = A_{-1} \in R$$

Die formale Ableitung $\partial_z : R[[z^{\pm}]] \rightarrow R[[z^{\pm}]]$ ist gegeben durch

$$\partial_z \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j z^j \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j A_j z^{j-1}$$

Bemerkung: 1. Es gilt $\text{Res}_z A(z)B(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j B_{-j-1}$, wenn $AB(z)$ definiert ist.

Beweis: Folgt aus der Definition von $A(z)B(z)$ und Res_z

2. $\text{Res}_z (\partial_z A(z)) B(z) = -\text{Res}_z A(z) \partial_z B(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot A_k B_{-k}$

Beweis: Folgt aus den Definitionen von Res_z und ∂_z mit Hilfe von 1.

Beachte: $\text{Res}_z \partial_z A(z) = 0$ für alle $A \in R[[z^\pm]]$

Definition 1.3. Die formale Delta-Funktion ist die formale Distribution $\delta \in \mathbb{C}[[z^\pm, w^\pm]]$ die gegeben ist, durch

$$\delta(z-w) = z^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w}{z}\right)^n$$

Bemerkung: 1. Wie man sofort sieht, gilt folgende Gleichungskette:

$$\delta(z-w) = z^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n w^{-n-1} = w^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z}{w}\right)^n$$

2. Für $A \in R[[z^\pm]]$ ist $A(z)\delta(z-w)$ wohldefiniert und kann als Distribution in $R[[w^\pm]][[z^\pm]]$ betrachtet werden.

Beweis: $\delta(z-w) = \delta(w-z)$ und $\delta(z-w) = \sum D_{kn} z^k w^n$ mit $D_{kn} = \delta_{k,-n-1}$.

3. Es gilt für jedes $A \in R[[z^\pm]]$:

$$\text{Res}_z A(z)\delta(z-w) = A(w) \quad \text{und} \quad A(z)\delta(z-w) = A(w)\delta(z-w)$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \bullet \text{Res}_z A(z)\delta(z-w) &= \text{Res}_z \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} A_n z^n z^{-m-1} w^m \right) = \text{Res}_z \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} A_{n+m+1} z^n w^m \right) \\ &= \text{Res}_z \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} A_m w^{m-n-1} z^n \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m w^m. \end{aligned}$$

• Die zweite Aussage wird später bewiesen.

4. In der Literatur wird die formale Delta-Funktion auch wie folgt definiert:

$$\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z^\pm]]$$

Es gilt dann $\delta(z-w) = z^{-1} \delta\left(\frac{w}{z}\right)$.

Im Fall $R = \mathbb{C}$ ist der Ring der formalen Laurent-Reihen $\mathbb{C}((z))$ ein Körper.

Beweis: Addition erfolgt komponentenweise, damit wird $(\mathbb{C}((z)), +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\tilde{0}$. Multiplikation ist wohldefiniert und da \mathbb{C} Körper ist, ist $(\mathbb{C}((z)) \setminus \tilde{0}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Das Distributivgesetz gilt, wie das Assoziativ- und Kommutativgesetz, weil es in \mathbb{C} gilt und sich per Konstruktion auf $\mathbb{C}((z))$ fortsetzt.

Dieser Körper kann mit dem Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{C}[[z]]$ identifiziert werden. Ebenso definiert man $\mathbb{C}((z_1, \dots, z_n))$ als Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$.

Aber $\mathbb{C}((z_1, \dots, z_n))$ ist im Allgemeinen kein Körper.

Betrachte die zwei Abbildungen:

$$\iota_{z,w}, \iota_{w,z} : \mathbb{C}((z, w))_s \rightarrow \mathbb{C}[[z^\pm, w^\pm]]$$

gegeben durch Laurent-Entwicklung im Bereich $|w| < |z|$ bzw. $|z| < |w|$ so ergibt sich:

$$\iota_{z,w}(z^k) = z^k = \iota_{w,z}(z^k), \quad \iota_{z,w}(w^k) = w^k = \iota_{w,z}(w^k)$$

und für z. B. $f = (z - w)^{-1} \in \mathbb{C}((z, w))$ folgt:

$$\begin{aligned} \iota_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_w^m f}{m!} \right) \Big|_{w=0} w^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{m!(z-w)^{-1-m}}{m!} \right) \Big|_{w=0} w^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{-1-m} w^m \in \mathbb{C}[[z^\pm, w^\pm]] \\ \iota_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_z^m f}{m!} \right) \Big|_{z=0} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m \cdot m! (z-w)^{-m-1}}{m!} \right) \Big|_{z=0} z^m \\ &= - \sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot w^{-m-1} \\ &= \sum_{m=-1}^{-\infty} z^{-1-m} w^m \in \mathbb{C}[[z^\pm, w^\pm]] \end{aligned}$$

Somit gilt insbesondere: $\iota_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)} \right) - \iota_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)} \right) = \delta(z-w)$.

Also stellen die beiden Entwicklungen zwei unterschiedliche Elemente in $R[[z^\pm, w^\pm]]$ da.

Bemerkung: $\mathbb{C}((z, w))_s \subset \mathbb{C}((z, w))$ sind die rationalen Funktionen der Form

$$f(z, w) = \frac{p(z, w)}{z^k w^l (z-w)^m} \in \mathbb{C}((z, w)) \text{ mit } k, l, m \geq 0, p \in \mathbb{C}[z, w],$$

d.h. die „rationalen Funktionen“ mit Singularitäten (höchstens) in $z = 0, w = 0, z = w$.

Wir wollen nun kurz betrachten warum man von „formalen Distributionen“ spricht.

Lemma 1.4. Jedes $A \in \mathbb{C}[[z^\pm]]$ wirkt auf $\mathbb{C}[z^\pm]$ als eine lineare Abbildung

$$\hat{A} : \mathbb{C}[z^\pm] \rightarrow \mathbb{C}$$

gegeben durch

$$\hat{A}(f(z)) := \text{Res}_z A(z) f(z), \quad f \in \mathbb{C}[z^\pm].$$

Also gibt es einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}[[z^\pm]] \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}[z^\pm], \mathbb{C}).$$

Beweis: $A \mapsto \hat{A}$ ist wohldefiniert und linear

Außerdem gilt für $f = \sum f_j z^j \in \mathbb{C}[z^\pm]$:

$$\hat{A}(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j f_{-(j+1)} \in \mathbb{C}$$

Also ist $A \mapsto \hat{A}$ injektiv und $\hat{A} \in \text{Hom}(\mathbb{C}[z^\pm], \mathbb{C})$.

Jedes $\mu \in \text{Hom}(\mathbb{C}[z^\pm], \mathbb{C})$ definiert Koeffizienten $A_j = \mu(z^{-j-1}) \in \mathbb{C}$ und die Distribution $A = \sum A_j z^j$ erfüllt:

$$\hat{A}(z^{-j-1}) = A_j = \mu(z^{-j-1}).$$

Somit ist $\hat{A} = \mu$ und die Abbildung $A \mapsto \hat{A}$ surjektiv. □

Bemerkung: Obiges Lemma zeigt, dass Laurent-Polynome $f \in \mathbb{C}[z^\pm]$ als Test-Funktionen betrachtet werden können, auf denen die „Distributionen“ $A \in \mathbb{C}[[z^\pm]]$ wirken.

Definition 1.5. Seien $A(z), B(z) \in \text{End}(V)[[z^\pm]]$, wobei V ein Vektorraum. Ist für beliebiges $v \in V$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m B_{n-m}(v)$$

eine endliche Summe, d.h. es existieren nur endlich viele von Null verschiedene Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}$, so heißt

$$A(z)B(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m B_{n-m} \right) z^n \in \text{End}(V)[[z^\pm]]$$

das Produkt von A und B .

Definition 1.6. Eine formale Distribution $a \in \text{End}(V)[[z^\pm]]$,

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-n-1} z^{-n-1}$$

heißt ein Feld, wenn für jedes $v \in V$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Bedingung

$$a_{-n-1} v = 0$$

erfüllt ist.

Bemerkung: 1. Äquivalent wäre zu fordern, dass $a(z).v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_{-n-1}.v) z^{-n-1}$ eine formale Laurent-Reihe mit Koeffizienten in V ist, d.h.

$$a(z).v \in V((z)) \quad \forall v \in V$$

2. Schreibweise: $a_n \cdot v = a_n(v) = a_n v$

- Lemma 1.7.** 1. $(z - w)\delta(z - w) = 0$,
2. $(z - w)D^{k+1}\delta(z - w) = D^k\delta(z - w)$ für $k \in \mathbb{N}$,
3. $(z - w)^n D^n \delta(z - w) = \delta(z - w)$ für $n \in \mathbb{N}$,
4. $(z - w)^{n+1} D^n \delta(z - w) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und somit
 $(z - w)^{n+m+1} D^n \delta(z - w) = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

Hierbei ist $D^n = \frac{1}{n!} \partial_z^n$.

Beweis:

1. Wir werden zeigen, dass $A(z)\delta(z - w) = A(w)\delta(z - w)$ ist für $A \in R[[z^\pm]]$, dann folgt die obige Aussage direkt. Sei $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n z^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A(z)\delta(z - w) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-1} w^m \right) \\
&= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} A_n z^n z^{-m-1} w^m \\
&= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} A_n z^{n-m-1} w^m \\
\lceil n \rightarrow m+n+1 \rceil \rightsquigarrow &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} A_{n+m+1} z^n w^m \\
\lceil m \rightarrow m-n-1 \rceil \rightsquigarrow &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} A_m w^{m-n-1} z^n \\
&= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} A_m w^m z^n w^{-n-1} \\
&= \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m w^m \right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n w^{-n-1} \right) = A(w)\delta(z - w)
\end{aligned}$$

2. Es gilt: $\partial_w^{k+1} \delta(z - w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (m \cdots (m - k)) z^{-m-1} w^{m-k-1}$, also

$$\begin{aligned}
(z - w) \partial_w^{k+1} \delta(z - w) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (m \cdots (m - k)) (z^{-m} w^{m-k-1} - z^{-m-1} w^{m-k}) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (((m+1)m \cdots (m-k+1)) - (m \cdots (m-k))) z^{-m-1} w^{m-k} \\
&= (k+1) \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \cdots (m-k+1) z^{-m-1} w^{m-k} = (k+1) \partial_w^k \delta(z - w)
\end{aligned}$$

3. Folgt direkt aus 2.

4. Folgt aus 3. und 1. □

§2 Lokalität und normale Ordnung

Sei R eine assoziative \mathbb{C} -Algebra. Auf R existiert immer der Kommutator $[S, T] = ST - TS$ für $T, S \in R$

Definition 2.1 (Lokalität).

Zwei formale Distributionen $A, B \in R[[z^\pm]]$ sind lokal im Bezug zueinander wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$(z - w)^N [A(z), B(w)] = 0$$

in $R[[z^\pm, w^\pm]]$

Bemerkung: 1. Man darf nicht einfach mit $(z - w)^{-N}$ multiplizieren;
Im Allgemeinen gilt nicht $[A(z), B(w)] = 0$ falls A, B lokal zueinander sind.

2. Für $A = \sum A_m z^m$ schreibt man meistens $A = \sum A_{(n)} z^{-n-1}$, damit gilt:

$$A_{(n)} = A_{-n-1} = \text{Res}_z A(z) z^n$$

3. $A(z) = A(z)_- + A(z)_+$ mit $A(z)_- = \sum_{n \geq 0} A_{(n)} z^{-n-1}$ und $A(z)_+ = \sum_{n < 0} A_{(n)} z^{-n-1}$

4. $A(z)B(w) = A(z)_+ B(w) + A(z)_- B(w)$

Definition 2.2 (normal-geordnetes Produkt).

Das normal-geordnete Produkt von Distributionen $A, B \in R[[z^\pm]]$ ist die Distribution

$$:A(z)B(w): = A(z)_+ B(w) + B(w) A(z)_-$$

Bemerkung: 1. Äquivalent zu obriger Definition ist

$$:A(z)B(w): = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m < 0} A_{(m)} B_{(n)} z^{-m-1} + \sum_{m \geq 0} B_{(n)} A_{(m)} z^{-m-1} \right) w^{-n-1}$$

2. Aus obriger Definition folgt:

$$\text{a) } A(z)B(w) = [A(z)_-, B(w)] + :A(z)B(w):$$

$$\text{b) } B(w)A(z) = -[A(z)_+, B(w)] + :A(z)B(w):$$

Satz 2.3. Seien $A, B \in \text{End}(V)[[z^\pm]]$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

1. A und B sind lokal, $(z - w)^N [A(z), B(w)] = 0$

2. Es gilt: $[A(z), B(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w) \partial_w^j \delta(z - w)$ mit $c^j(w) \in \text{End}(V)[[w^\pm]]$

$$3. \text{ Es gilt: } [A(z)_-, B(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} \iota_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w) \\ - [A(z)_+, B(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} \iota_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w) \\ \text{für } c^j(w) \in \text{End}(V)[[w^\pm]]$$

$$4. A(z)B(w) = \sum_{j=0}^{N-1} \iota_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w) + :A(z)B(w): \\ B(w)A(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \iota_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w) + :A(z)B(w):$$

$$5. \text{ Für } A(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_{(m)} z^{-m-1}, B(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \text{ gilt:}$$

$$[A_{(m)}, B_{(n)}] = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{m}{j} c^j_{(m+n-j)} \in \text{End}(V),$$

$$\text{wobei } c^j(w) = \sum c^j_{(n)} w^{-n-1}.$$

Man schreibt dann auch:

$$A(z)B(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z-w)^{j+1}}$$

Dies nennt man die „Operator-Produkt-Entwicklung“ (OPE)

Beweis: Ein Beweis findet sich in [KAC] auf Seite 26.

Beispiel:

Betrachte die Heisenberg Liealgebra H mit ihren Erzeugern $a_n = t^n$, $K \in H$, die folgende Relationen erfüllen:

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n} \quad ; \quad [a_m, K] = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Die a_n bilden eine Basis von $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ und Z sei zentral in H .

Betrachte nun den bosonische Fockraum $\mathcal{B} = \mathbb{C}[t_{-1}, t_{-2}, \dots]$ und die folgende Darstellung von H

$$\rho(a_n) = \frac{\partial}{\partial t_{-n}}, \\ \rho(a_0) = 0, \\ \rho(a_{-n}) = n \cdot t_{-n} \\ \rho(Z) = \text{id}_{\mathcal{B}}.$$

Die obigen Relation gelten auf immer noch. Sei nun

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

eine formale Distribution $A \in \text{End}(\mathcal{B})[[z^\pm]]$. Es gilt dann:

$$[A(z), A(w)] = \partial_z \delta(z-w) K$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} [A(z), A(w)] &= \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m w^{-m-1} \right] = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} [a_n, a_m] z^{-n-1} w^{-m-1} \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} (m \cdot \delta_{m, -n} K) z^{-n-1} w^{-m-1} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m K z^{m-1} w^{-m-1} \\ &= \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} m z^{m-1} w^{-m-1} \right) K \\ &= \partial_z \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m w^{-m-1} \right) K = \partial_z \delta(z-w) K \end{aligned}$$

Außerdem ist A lokal zu sich selbst, den mit Lemma 1.7 folgt:

$$0 = (z-w)^2 D^1 \delta(z-w) K = (z-w)^2 \frac{1}{1!} \partial_z^1 \delta(z-w) K = (z-w)^2 \partial_z \delta(z-w) K$$

Für die OPE folgt ($c^1(w) = 1$, $c^j(w) = 0$ für $j \neq 1$):

$$A(z)A(w) \sim \frac{K}{(z-w)^2}$$

§3 Vertex-Superalgebra

Sei V ein Superraum, also ein Vektorraum der als direkte Summe von zwei Unterräumen geschrieben werden kann:

$$V = V_{\bar{0}} + V_{\bar{1}}$$

Hierbei sind $\bar{0}$ und $\bar{1}$ die Nebenklassen von 0 und 1 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition 3.1. 1. Ein Element $A \in V$ hat Parität $p(a) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wenn $A \in V_{p(A)}$

2. Ein Feld hat Parität $p(a) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wenn

$$a_{(n)}V_{\alpha} \subset V_{\alpha+p(a)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

Definition 3.2 (Vertex-Superalgebra).

Eine Vertex-Superalgebra besteht aus den Daten

1. einem Superraum V , dem Zustandsraum;
2. einem Vektor $\Omega \in V_{\bar{0}}$, dem Vakuumvektor;
3. einer paritätserhaltenden linearen Abbildung von V in den Raum der Felder

$$a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1},$$

der Zustand-Feld-Korrespondenz,

die, die folgende Axiome erfüllen

1. **Translations Kovarianz:** $[T, Y(a, z)] = \partial Y(a, z)$, wobei $T \in \text{End}(V)$ definiert ist durch $T(a) = a_{(-2)}\Omega$;
2. **Vakuum:** $Y(\Omega, z) = \text{id}_V$, $Y(a, z)\Omega|_{z=0} = a$;
3. **Lokalität:** $(z-w)^N Y(a, z)Y(b, w) = (-1)^{p(a)p(b)}(z-w)^N Y(b, w)Y(a, z)$ für $N \gg 0$.

Bemerkung: 1. Der Kommutator im Translations-Axiom ist $[T, Y] = TY - YT$, damit gilt:

$$[T, a_{(n)}] = -na_{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } [T, Y(a, z)] &= \sum [T, a_{(n)}] z^{-n-1} = -\sum (n+1)a_{(n)}z^{-n-1} \\ &= -\sum n a_{(n-1)}z^{-n-1} \iff [T, a_{(n)}] = -na_{(n-1)}. \end{aligned}$$

2. Das erste Vakuum-Axiom besagt: $\Omega = \delta_{n,-1}$, also $T\Omega = 0$
Das zweite Vakuum-Axiom besagt: $a_{(n)}\Omega = 0$ für $n \geq 0$, $a_{(-1)}\Omega = a$

3. Mit Hilfe der obigen Bemerkungen und der Axiome für Vertex-Superalgebren folgt:

$$T^n(a) = [T^n, a_{(n)}] \Omega = n! a_{(-n-1)} \Omega$$

somit

$$\frac{T^n(a)}{n!} = a_{(-n-1)} \Omega, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dies ist äquivalent zu

$$Y(a, z) \Omega = e^{zT}(a).$$

4. In physikalischen Anwendungen ist V ein dichter Untervektorraum eines Hilbertraums („Zustandsraum“).
5. Die Vertexoperatoren $Y(a, z)$ sind „Quantenfelder“, operatorwertige Distributionen auf der „Raumzeit“ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachte hierfür 1+1-dimensionale Feldtheorien, genauer den Raum $\Sigma = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (die Raumrichtung wurde „kompaktifiziert“). Dies identifiziert man mit $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mittels

$$\omega \mapsto \exp(2\pi\omega) = \exp(2\pi(t + ix)) =: z$$

Es gilt dann $t = -\infty \hat{=} z = 0$ und $t = +\infty \hat{=} z = \infty$

Jedem Quantenfeld entspricht also ein „Anfangszustand“ (Zustand bei $t = -\infty$).

Dies spiegelt gerade den in der Motivation erwähnten Punkt der Erzeugung wieder.

Das Feld $Y(a, z)$ wirkt auf das Vakuum und „erzeugt“ einen Anfangszustand.

Die Translations-Kovarianz ist im Vertexoperator $Y(a, z)$ kodiert und aus der Lokalität der Vertexalgebra ergibt sich direkt die Lokalität der Feldtheorie.

Satz 3.3 (Rekonstruktionssatz).

Sei V ein Vektorraum, $\Omega \in V$, $T \in \text{End}(V)$, S abzählbare geordnete Menge und $(a^s)_{s \in S}$ eine Familie von Vektoren aus V zusammen mit Feldern

$$F(a^s, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)}^s z^{-n-1} \in \text{End}(V)[[z^\pm]]$$

so dass gilt:

1. $F(a^s, z) \Omega \in V[[z]]$ und $F(a^s, z)|_{z=0} = a^s$ für alle $s \in S$
2. $T \Omega = 0$ und $[T, F(a^s, z)] = \partial_z F(a^s, z)$
3. Alle Felder $F(a^s, z)$ sind paarweise lokal
4. Die Vektoren $a_{(n_1)}^{s_1} \cdots a_{(n_k)}^{s_k} \Omega$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $s^j \in S$, $n_j < 0$ erzeugen den Vektorraum V linear.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Vertexalgebrenstruktur auf V , so dass

$$Y(a^s, z) = F(a^s, z) \quad \forall s \in S.$$

Die Zustands-Feld-Korrespondenz ist gegeben durch:

$$Y(a_{(n_1)}^{s_1} \cdots a_{(n_k)}^{s_k} \Omega, z) =: D^{-n_1-1} F(a^{s_1}, z) \cdots D^{-n_k-1} F(a^{s_k}, z):$$

wobei $:A_1(z) \cdots A_k(z): = :A_1(z) (:A_2(z) \cdots A_k(z):):$ und $D_z^n = \frac{1}{n!} \partial_z^n$.

Beweis: Ein Beweis findet sich z.B. in [SCHO] auf Seite 188.

Beispiel:

Mit Hilfe des obigen Satzes wollen wir nun die Vertexalgebra eines freien Bosons konstruieren. Kehren wir dafür nochmal zum bosonischen Fockraum $\mathcal{B} = \mathbb{C}[t_{-1}, t_{-2}, \dots]$ zurück. Im vorletzten Vortrag haben wir bereits gesehen, dass

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \in \text{End}(\mathcal{B})[[z^{\pm}]]$$

das Feld eines freien Bosons ist.

Die Wirkung von a_n auf \mathcal{B} haben wir in dem Beispiel über die Heisenberg Liealgebra gesehen. Mit dem Vakuumvektor $\Omega = 1$ folgt $a_n \Omega = 0$ für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

Somit gilt:

$$b(z)\Omega = \sum_{n < 0} (a_n \Omega) z^{-n-1} = \sum_{k \geq 0} (a_{-k-1} \Omega) z^k$$

Also $b(z)\Omega|_{z=0} = a_{-1}\Omega$.

Wir haben bereits gesehen, dass $a(z)$ lokal zu sich selbst ist und die a_n erzeugen den Fockraum \mathcal{B} . Definiere $F(a_{-1}, z) := b(z)$.

Nun benötigen wir noch einen Translationsoperator T , für diesen muss gelten:

$$[T, a_n] = -n a_{n-1}, \quad T\Omega = 0$$

Rekursiv kommt man auf den eindeutigen Operator:

$$T = \sum_{m > 0} a_{-m-1} a_m$$

Der Rekonstruktionssatz garantiert nun, dass

$$Y(a_{-1}, z) := a(z) \text{ und } Y(a_{n_1} \cdots a_{n_k} \Omega, z) =: D^{-n_1-1} a(z) \cdots D^{-n_k-1} a(z):$$

eine Vertexalgebrenstruktur auf $\text{End}(\mathcal{B})$ definiert.

Bemerkung: Durch ein ähnliches Vorgehen für die freien fermionischen Felder, die gegeben sind durch

$$b(z) = \sum_{n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} b_{(n)} z^{-i-\frac{1}{2}}$$

findet man auch hier eine entsprechende Vertexalgebrenstruktur.

Im Rahmen von konformen Vertexalgebren lässt sich auch direkt der Energie-Impuls-Tensor in ein Vertexalgebra kodieren.

Literatur

- [BORC] R.E. Borcherds: *Vertex algebras, Kac-Moody algebra and the monster*, (Proc. Natl. Acad. Sci. USA 1986)
- [FREN] D. Ben-Zvi, E. Frenkel: *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd edition
- [KAC] V. Kac: *Vertex Algebras for Beginners*, volume 10 of University Lecture Series (American Mathematical Society 1998)
- [MASO] G. Mason: *Vertex Operator Algebras, Modular Forms and Moonshine*, University of California, Santa Cruz
- [SCHO] M. Schottenloher: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Lect. Notes Phys. 759 (Springer, Berlin Heidelberg 2008)