

# Integration im Komplexen

## Seminar "Integraltransformationen", WS 2012/13

### 1 Holomorphe Funktionen

**Definition 1** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *komplex differenzierbar* im Punkt  $z \in U$ , falls der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z, w \neq z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existiert. Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph* im Punkt  $z \in U$ , wenn  $f$  in einer offenen Umgebung  $V \subset U$  von  $z$  komplex differenzierbar ist, und *holomorph auf  $U$* , falls  $f$  in jedem Punkt von  $U$  holomorph ist.

Wie üblich wird die Konvergenz bezüglich des Abstands  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{C}$  definiert. Wie im Reellen folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit die Stetigkeit und die lineare Approximierbarkeit. Jede Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  ist im Inneren ihres Konvergenzkreises komplex differenzierbar und damit holomorph, mit  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ . Es zeigt sich, daß sogar die Umkehrung gilt: Jede holomorphe Funktionen hat lokal eine Darstellung als Potenzreihe. Holomorphie von  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  ist äquivalent zu stetiger partieller Differenzierbarkeit von  $u, v$  plus Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\partial_x u = \partial_y v$  und  $\partial_y u = -\partial_x v$  in einer Umgebung von  $z$ .

### 2 Cauchyscher Integralsatz

Ist  $c(t) = x(t) + iy(t)$  eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve von  $c(\alpha)$  nach  $c(\beta)$ , so wird das Kurvenintegral der 1-Form  $f dz$  längs  $c$  erklärt als  $\int_c f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} dt f(c(t)) c'(t)$ . Das Integral versteht man typischerweise als Grenzwert Riemannscher Summen. Die Standardabschätzungen liefern  $\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(c(t))| L(c)$ , wobei  $L(c) := \int_a^b dt \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  die Bogenlänge von  $c$  ist.

**Satz 2 (Lemma von Goursat)** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\Delta$  ein offenes Dreieck mit  $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta \subset U$ . Dann gilt  $\int_{\partial\Delta} dz f(z) = 0$ .

*Beweisidee.* Durch Verbinden der Seitenmittelpunkte entstehen aus  $\Delta$  vier kongruente Dreiecke  $\Delta_a, \dots, \Delta_d$ . Da sich die Wegintegrale der inneren Seiten gegeneinander wegheben, gilt  $\int_{\partial\Delta} dz f(z) = \sum_{i=a,b,c,d} \int_{\partial\Delta_i} dz f(z)$ . Sei  $\Delta_1$  das

Dreieck mit betragsmäßig größtem Kurvenintegral, das erneut unterteilt wird, usw, so daß eine Folge  $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n$  von Dreiecken entsteht mit  $\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} dz f(z) \right|$ . Nach Vollständigkeit gibt es ein  $z_0 \in \Delta_n$  für alle  $n$ , und Holomorphie liefert

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + |z - z_0|r(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = 0 .$$

Jedes Polynom ist wegunabhängig integrierbar, d.h.  $\int_{\partial\Delta_n} dz (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) = 0$ , und Standardabschätzungen für den Restterm liefern die Behauptung für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Das Wegintegral einer beliebigen Kurve läßt sich beliebig genau durch das Integral über ein einbeschriebenes Sehnenpolynom approximieren. Letzteres kann trianguliert werden, so daß aus dem Lemma von Goursat (und nach Diskussion von Selbstschnittpunkten) folgt:

**Satz 3 (Cauchyscher Integralsatz)** *Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann gilt:*

- i) *Für jede in  $U$  kontrahierbare stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  gilt  $\int_c dz f(z) = 0$ .*
- ii) *Sind  $c_0, c_1$  homotope stückweise stetig differenzierbare Kurven in  $U$  mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, dann gilt*

$$\int_{c_0} dz f(z) = \int_{c_1} dz f(z) .$$

- iii) *Ist  $U$  einfach zusammenhängend und  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve von  $c(\alpha) = z_0$  nach  $c(\beta) = z$ , dann ist das Integral*

$$F(z) := \int_{z_0}^z dw f(w) = \int_c dw f(w)$$

*unabhängig von  $c$  und eine holomorphe Stammfunktion zu  $f$ , d.h. es gilt  $F'(z) = f(z)$ .*

Zur Erinnerung:

**Definition 4** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen.

- i) Zwei stetige Kurven  $c_0, c_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  mit  $c_0(\alpha) = c_1(\alpha) = a$  und  $c_0(\beta) = c_1(\beta) = b$  heißen *homotop* in  $U$ , wenn sie in  $U$  stetig ineinander deformiert werden können, d.h. wenn es eine stetige Abbildung  $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \mapsto U$  gibt mit  $H(t, 0) = c_0(t)$  und  $H(t, 1) = c_1(t)$  für alle  $t \in [\alpha, \beta]$  sowie  $H(\alpha, s) = a$  und  $H(\beta, s) = b$  für alle  $s \in [0, 1]$ .
- ii) Eine geschlossene stetige Kurve  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$  mit  $c(\alpha) = c(\beta) = a$  heißt *kontrahierbar* in  $U$  (oder *nullhomotop*), wenn sie homotop zum Punkt  $c_0(t) = a$  für alle  $t \in [\alpha, \beta]$  ist.
- iii)  $U$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn  $U$  zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in  $U$  kontrahierbar ist.

### 3 Die Cauchysche Integralformel

**Satz 5 (Cauchysche Integralformel)** *Es sei  $f$  holomorph in einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$ , welche die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{K_r(a)}$  mit Mittelpunkt  $a \in U$  und Radius  $r$  enthält. Dann gilt für jeden Punkt  $z \in K_r(a)$  im Inneren des Kreises*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

*Beweisidee.* Durch Entfernen eines kleinen Kreises  $\overline{K_\epsilon(z)}$ , Aufschneiden des entstehenden Torus und Anwenden des Cauchyschen Integralsatzes für den aufgeschnittenen Torus, in dem  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  holomorph ist.  $\square$

Entscheidend für die gesamte Funktionentheorie ist die Tatsache, daß man den Wert  $f(z)$  durch ein Kurvenintegral berechnen kann, wobei die Kurve *außerhalb* von problematischen Punkten der Funktion gewählt werden kann. Außerdem geht der Punkt  $z$  im Kurvenintegral gar nicht in die Funktion  $f$  ein, sondern tritt nur im Faktor  $\frac{1}{\zeta - z}$  auf. Dadurch lassen sich bemerkenswerte Aussagen gewinnen. Sucht man z.B. eine Integraltransformation oder eine Umkehrtransformation von  $f$ , so muß man (Vertauschbarkeit der Integrale nach Fubini vorausgesetzt) nur die (Umkehr-)Transformation von  $\frac{1}{\xi - z}$  bezüglich  $z$  kennen. Anschließend ist das verbleibende Kurvenintegral über  $\partial K_r(a)$  zu berechnen. Nach Cauchyschem Integralsatz dürfen wir den Integrationsweg deformieren, solange dieser keine Singularitäten trifft.

Eine weitere Folgerung ist:

**Satz 6 (Potenzreihenentwicklung)** *Eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  kann in jeder offenen Kreisscheibe  $K_\rho(a) \subset U$  in eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$  entwickelt werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Abstand des Mittelpunktes  $a$  zum Rand von*

$U$ . Die Entwicklungskoeffizienten sind gegeben durch die Integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Radius  $0 < r < \rho$ . Ist  $|f(\zeta)| < M$  für alle  $\zeta \in \partial K_r(a)$ , dann können die Koeffizienten abgeschätzt werden durch  $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ .

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

**Satz 7** Jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist beliebig oft komplex differenzierbar, alle Ableitungen  $f^{(k)}$  sind holomorph und gegeben durch

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad z \in K_r(a). \quad \square$$

Diese Aussage ist grundlegend verschieden von der reellen Differentialrechnung: Für eine reell differenzierbare Funktion muß die Ableitung nicht einmal stetig sein (z.B.  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ). Selbst wenn eine Funktion beliebig oft reell differenzierbar ist, muß sie nicht in eine Potenzreihe entwickelbar sein (z.B.  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  in  $x = 0$ ).

Eine komplexe Funktion  $f$ , die überall auf  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph ist, heißt *ganze Funktion*. Nach Satz 6 gibt es für eine ganze Funktion  $f$  die Darstellung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  mit Konvergenzradius  $\infty$ .

**Satz 8 (Liouville)** Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

*Beweis.* Ist  $|f| \leq M$  auf  $\mathbb{C}$ , dann erfüllen die Entwicklungskoeffizienten nach Satz 6 die Abschätzung  $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$  für beliebiges  $r > 0$ . Also ist  $a_n = 0$  für alle  $n \geq 1$  und  $f(z) = a_0$ .  $\square$

Der Satz von Liouville hat kein Analogon in der reellen Differentialrechnung. Z.B. ist  $f(x) = \sin x$  beliebig oft differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ , beschränkt, und nichtkonstant. Der Satz von von Liouville liefert einen kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Anwenden auf das inverse Polynom.

## 4 Der Residuensatz

Wichtig für die Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel zur Berechnung von Integralen ist eine genauere Diskussion möglicher Singularitäten von komplexen Funktionen.

**Definition 9** Ist  $f$  holomorph in einer Umgebung  $U \setminus \{a\}$  eines Punktes  $a \in U$ , so heißt  $a$  eine *isolierte Singularität* von  $f$ , und zwar:

- i) Eine *hebbare Singularität*, wenn  $f$  holomorph in den Punkt  $a$  fortgesetzt werden kann (hierzu genügt:  $f$  ist auf  $V \setminus \{a\}$  beschränkt,  $V \subset U$ ).
- ii) Ein *Pol*, wenn keine holomorphe Fortsetzung in  $a$  existiert, aber ein  $k \in \mathbb{N}^\times$  derart, daß  $(z - a)^k f$  holomorph in den Punkt  $a$  fortgesetzt werden kann. Die kleinste derartige Zahl  $k$  heißt die *Vielfachheit des Pols*.
- iii) Eine *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch Pol ist.

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt *meromorph*, wenn sie bis auf Pole in  $U$  holomorph ist.

Jede rationale Funktion ist meromorph.

Ist  $f$  holomorph in  $U \setminus \{a\}$  und liegt in  $a$  ein Pol der Ordnung  $k$  vor, dann hat die eindeutige Fortsetzung von  $f$  auf  $U$  die *Laurent-Reihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - a)^n .$$

**Satz 10** Eine auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Funktion habe in  $a$  einen  $k$ -fachen Pol.

Dann sind die Entwicklungskoeffizienten der Laurent-Reihe  $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - a)^n$  gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Kreis  $K_r(a)$  um  $a$  mit Radius  $r > 0$ , so daß  $\overline{K_r(a)} \subset U$ .

Offenbar hat eine auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Funktion genau dann eine wesentliche Singularität in  $a$ , wenn der Hauptteil der Laurent-Entwicklung  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$  nicht abbricht. Eine Funktion  $f$  ist in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität stark oszillierend:

**Satz 11 (Picard)** Mit höchstens einer Ausnahme nimmt  $f$  in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl unendlich oft an.

Z.B. hat  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  in  $z = 0$  eine wesentliche Singularität, und 0 wird nicht angenommen.

**Definition 12** Es sei  $f$  eine auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Funktion mit Laurent-Reihenentwicklung  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ . Dann heißt der Koeffizient  $a_{-1} = \text{res}_a f$  das *Residuum* von  $f$  in  $a$ .

Offenbar ist  $\operatorname{res}_a f = 0$ , wenn  $f$  in  $a$  holomorph ist oder (wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Reihe) in  $a$  eine hebbare Singularität besitzt. Nach Satz 10 gilt:

**Satz 13** *Es sei  $f$  eine auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} f(z) dz$$

für einen beliebigen Kreis  $K_r(a)$  um  $a$  mit Radius  $r > 0$ , so daß  $\overline{K_r(a)} \subset U$ .  $\square$

Eine wichtige Spezialfälle:

- $\operatorname{res}_a \frac{g(z)}{z-a} = g(a)$
- $\operatorname{res}_a \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$  falls  $h'(a) \neq 0$
- $\operatorname{res}_a \left( \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n \right) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left( (z-a)^k f(z) \right) \Big|_{z=a}$

Wir beschränken uns im folgenden Residuensatz auf die einfachste (aber wichtigste) Situation des Integrationsweges. Es gibt Verallgemeinerungen, die die Windungszahl einbeziehen.

**Satz 14 (Residuensatz)** *Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $S \subset U$  eine Teilmenge ohne Häufungspunkt in  $U$  und  $f$  holomorph auf  $U \setminus S$ . Sei  $A \subset U$  eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

- i)  $A$  ist einfach zusammenhängend in  $U$ ,
- ii) der Rand  $\gamma := \partial A$  liegt in  $U$  und ist stückweise stetig differenzierbar,
- iii)  $S \cap \gamma = \emptyset$ , d.h. der Rand  $\partial A$  trifft keinen Punkt aus  $S$ .

Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cap A} \operatorname{res}_a f .$$

*Beweisidee.* Man entfernt genügend kleine Kreise  $\overline{K_{\epsilon_a}(a)}$  für jeden Punkt  $a \in S \cap A$ , schneidet das entstehende Gebiet zwischen  $\gamma$  und  $\partial K_{\epsilon_a}(a)$  auf und verwendet den Cauchyschen Integralsatz an.  $\square$

Der Residuensatz ist ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung von reellen Integralen. Wichtige Anwendungen sind Integrale über den Einheitskreis oder über die reelle Achse. Im zweiten Fall muß man die Kurve von  $-R$  nach  $R$  in der komplexen Ebene geeignet schließen und argumentieren, daß für  $R \rightarrow \infty$  das Integral über den Rückweg keinen Beitrag liefert. Auch einige der zu diskutierenden Integraltransformationen benötigen den Residuensatz.

Eine andere wichtige Anwendung des Residuensatzes ist die Lokalisierung von Nullstellen und Polstellen.

**Satz 15 (Nullstellen und Polstellen zählendes Integral)** *Es sei  $f$  eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf  $U \subset \mathbb{C}$ , ferner  $S \subset U$  die Menge der Nullstellen und Polstellen von  $f$  und  $A \subset U$  eine Teilmenge, deren Rand  $\partial A$  die Voraussetzungen des Residuensatzes erfüllt. Dann gilt für die Anzahl der Nullstellen  $N_A$  von  $f$  in  $A$  und die Anzahl der Polstellen  $P_A$  von  $f$  in  $A$ , jeweils mit Vielfachheit gezählt, die Formel*

$$N_A - P_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} dz \frac{f'(z)}{f(z)}$$

**Satz 16 (Rouché)** *Es seien  $f, g$  holomorphe Funktionen auf  $U \subset \mathbb{C}$  und  $A \subset U$  eine Teilmenge mit stückweise stetig differenzierbarem Rand  $\partial A \subset U$ . Es gelte  $|g(z)| < |f(z)|$  für alle  $z \in \partial A$ . Dann haben  $f$  und  $f + g$  die gleiche Anzahl von Nullstellen in  $A$ .*