Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik

Seminararbeit

Laplace-Transformation I: Grundlagen

Matthias Böckmann

13.11.2012
betreut durch Dr. Raimar Wulkenhaar

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Laplace-Transformation ist ein leistungsstarkes Werkzeug der Mathematik mit der die Untersuchung von dynamischen Systemen erleichtert wird. Den Grundstein der Laplace-Transformation legte Léonard Euler (1707/1783), der nach Lösungen für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung suchte. Später führte Pierre-Simon Laplace die Idee von Euler weiter und entwickelte eine Transformation (1812). Der Name Laplace-Transformation wurde erst später gebräuchlich.

Bei eben genannten Untersuchungen dynamischer Systeme stößt man häufig auf Zeitfunktionen $f(t)$, die erst ab einem bestimmten Zeitpunkt der Untersuchung interessieren, $t = 0$. Hier seien beispielsweise Einschaltvorgänge in der Elektrotechnik, wie der Spannungsverlauf an einem Kondensator, genannt. Besonders hilfreich ist, dass die Anwendung der Laplace-Transformation unabhängig von der speziellen Natur der Systeme wirksam ist. Man kann demnach technische und nicht-technische Systeme gleichermaßen behandeln. Bekannterweise fokusiert sich das Interesse auch bei ökonomischen oder naturwissenschaftlichen Problemen meist auf das Intervall ab einem bestimmten Zeitpunkt, einem Eingriff in das jeweilige System. Folglich betrachtet man Zeitfunktionen $f(t)$, die nur für $t > 0$ von Interesse sind. Denkt man an einen Einschaltvorgang, so ist $f(t)$ für $t < 0$ Null.
Um eine bessere Bearbeitung der Zeitfunktionen $f(t)$ ermöglichen zu können , werden sie durch die Laplac-Transformation in komplexe Funktionen umgewandelt. Auf diese Weise entstehen Eigenschaften, die eine Untersuchung der ursprünglichen Zeitfunktionen erleichtern.
Zu diesem Zweck multipliziert man $f(t)$ mit dem Faktor e^{-st}, wobei $s = x + iy$ eine komplexe Variable ist. Anschließend integriert man über t von $t = 0$ bis $t = \infty$ und erhält so

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

Hierbei ist t also die Integrationsvariable und s ein komplexer Parameter. Nach Ausführung des Integrals hängt der Term nur noch von s ab, ist somit eine komplexe Funktion von s.

Im Folgenden wird die Laplace-Transformation mathematisch definiert und deren Eigenschaften erläutert. Anschließend werden Beispiele gegeben, die zugleich die allgemeinen Eigenschaften der Laplace-Transformation verständlich machen. So besteht die Möglichkeit, die Laplace-Transformation genauer zu verstehen. Neben der Transformation ist es jedoch ebenfalls essentiell eine Rücktransformation zur Lösung eines Problems anzufertigen. Deshalb wird zuletzt die komlpexe Umkehrformel der Laplace-Transformation beschrieben.

Bemerkung: Dieses Kapitel bezieht sich hauptsächlich auf O. Föllinger, 2011.

2 Die Laplace-Transformation

Um zu einer konkreten Definition der Laplace-Transformation zu gelangen verfährt man wie zuvor beschrieben. Man multipliziert die Zeitfunktion $f(t)$ mit e^{-st} und integriegt über $t = [0, \infty]$. Dabei wird $f(t)$ wie folgt eine Bildfunktion $F(s)$ zugeordnet:

2.1 Definition:

Die Funktion

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

heißt Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$, sofern das uneigentliche Integral existiert.
Symbolische Schreibweise:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

2.2 Bezeichnungen:

$f(t)$: Originalfunktion (auch Zeitfunktion genannt)

$F(s)$: Bildfunktion, Laplace-Transformierte von f(t)

$\mathscr{L}$: Laplace-Transformationsoperator

Bemerkung: Die Menge der Originalfunktionen heißt Originalbereich oder Originalraum, die Menge der Bildfunktionen Bildbereich oder Bildraum. Originalfunktion $f(t)$ und Bildfunktion $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ bilden ein zusammengehöriges Funktionenpaar, auch Korrespondenz genannt.
Man verwendet für die Korresponzen auch die folgende Schreibweise:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

Das uneigentliche Integral heißt Laplace-Integral und die Zuordnung der komplexen Funtion $F(s)$ zur Zeitfunktion $f(t)$ Laplace-Transformation
Von besonderem Interesse ist nun welche Funktionen überhaupt laplace-integrierbar sind und darüberhinaus in welchen Definitionsbereichen dies möglich ist. Dazu werden zunächst zwei Beispiele genannt, die den Begriff Laplace-Transformation genauer veranschaulichen.

2.3 Beispiele:

1. **Laplace-Transformation des Einheitssprungs:**

   Definition des Einheitssprungs: $\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$. Wegen $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ gilt:

   $$\int_0^\infty \sigma(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^\infty 1e^{-st}\mathrm{d}t}_{(*)} = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

   Hierin ist s eine komplexe Zahl der Form $s = x + iy$ und somit

   $$e^{-st} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt}e^{-iyt} = e^{-xt}(\cos yt - i \sin yt).$$

   Es handelt sich also um eine komplexe Darstellung einer Schwingung. Da für $t \to +\infty$

   $$e^{-xt} \to \begin{cases} 0 \text{ für } x > 0 \\ 1 \text{ für } x = 0 \\ +\infty \text{ für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{gilt,}$$

   klingt diese Schwinung ab für $x > 0$ und ein Grenzwert für e^{-st} existiert, $e^{-st} \to 0$. Für $x \leq 0$ existiert kein solcher Grenzwert, also existiert auch das uneigentliche Integral dort nicht. Das Integral konvergiert für alle s aus der rechten s-Ebene mit $Re(s) > 0$ und es gilt:

   $$\int_0^\infty \sigma(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) - \left(-\frac{1}{s}e^{-s0}\right) = \frac{1}{s}.$$

   Die Laplace-Transformierte des Einheitssprunges $\sigma(t)$ ist also die komplexe Funktion $F(s) = \frac{1}{s}$.

2. **Laplace-Transformation der e-Funktion**

   Ist $f(t) = e^{\alpha t}$, α beliebig komplex, so ist das Laplace-Integral

   $$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t.$$

   Das ist der gleiche Ausdruck wie $(*)$ aus dem vorherigen Beispiel nur mit $s-\alpha$ an Stelle von s, also folgt:

   $$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-\alpha},$$

sofern $Re(s-\alpha) > 0$, d.h. $Re(s) - Re(\alpha) > o$ oder

$$Re(s) > Re(\alpha).$$

Demnach ist die Laplace-Transformierte der e-Funktion die Funktion $F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$.

Bemerkung Mit dem oben genannten Beispiel 2.3.2 lässt sich nach Partialbruchzerlegung die Umkehrfunktion von rationalen Funktionen ermitteln.

Bemerkung: Aus den Beispielen lässt sich entnehmen, dass die Laplace-Integrale jeweils in rechten Halbebenen der s-Ebene existieren.

Bemerkung: Die Beispiele 2.3 stammen aus O.Föllinger, 2011. Der Rest aus Kapitel 2 bezieht sich auf L. Papula, 2007.

3 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Nun befassen wir uns mit den Eigenschaften der Laplace-Transformation. Dazu wird sich auf B.Forster, 2012 und A.D. Poularikas, 2000 bezogen. Wie eben schon festgestellt, existiert das Laplace-Integral einer zutransformierenden Zeitfunktion in einer rechten Halbebene der s-Ebene. Jetzt wollen wir uns genauer damit beschäftigen wie der Definitionsbereiche beschaffen ist und welche Funktionen transformierbar sind. Zunächst ist es jedoch notwendig die folgenden Definitionen zu nennen.

3.1 Definition:

1. Eine Funktion f besitzt eine Sprung-Unstetigkeitsstelle am Punkt t_0, wenn beide Limiten
$$\lim_{t\to t_0-} f(t) \text{ und } \lim_{t\to t_0+} f(t)$$
existieren und $f(t_0-) \neq f(t_0+)$.
2. Eine Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig, wenn
$$\lim_{t\to 0+} f(t) = f(0+) \text{ existiert,}$$
und f auf jedem endlichen intervall $]0,b[$ stetig ist, außer an endlich vielen Ausnahmepunkten $a_1 \dots a_n \in \,]0,b[$, an welchen Sprung-Unstetigkeitsstellen vorliegen. Insbesondere ist f dann beschränkt auf $[0,b[$ und dort Riemann-integrierbar.
3. Eine Funktion f besitzt exponentielles Wachstum der Rate höchstens $\alpha > 0$, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit
$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t \geq t_0,$$
für ein geeignetes $t_0 > 0$. (d.h. f wächst nicht schneller als $Me^{\alpha t}$)

Mit den obigen Definitionen lässt sich der folgende Satz erläutern.

3.2 Satz (Existenz):

Sei f eine stückweise stetige Funktion auf $[0, \infty[$ und von exponentiellem Wachstum mit der Rate höchstens α. Dann existiert die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}\{f(t)\}$ für alle $Re(s) > \alpha$ und sie konvergiert absolut.

Bemerkung: $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existiert und konvergiert absolut, wenn

$$\int_0^\infty \left| f(t)e^{-st} \right| \mathrm{d}t < \infty$$

Beweis. Es gibt nach Voraussetzung ein $\alpha > 0$ mit

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, t \geq t_0.$$

Da f stückweise stetig auf $[0, t_0]$ und daher dort beschränkt ist, gibt es $M_2 > 0$ mit

$$|f(t)| \leq M_2.\ 0 < t < t_0$$

Da $e^{\alpha t}$ auf $o \leq t \leq t_0$ beschränkt ist, gibt es $M > 0$ mit

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t},\ t > 0$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \left| e^{-st} f(t) \right| \mathrm{d}t &\leq \int_0^\tau \left| e^{-st} M e^{\alpha t} \right| \mathrm{d}t = M \int_0^\tau \left| e^{-st+\alpha t} \right| \mathrm{d}t \\
&= M \int_0^\tau \left| e^{-(x+iy)t+\alpha t} \right| \mathrm{d}t = M \int_0^\tau \left| e^{-(x+\alpha)t} e^{-iyt} \right| \mathrm{d}t \\
&= M \int_o^\tau e^{-Re(s)-\alpha t} \mathrm{d}t = \left[\frac{M e^{-(Re(s)-\alpha)t}}{-(Re(s)-\alpha)} \right]_{t=0}^{\tau} \\
&= \frac{M}{Re(s)-\alpha} - \frac{M e^{-(x-\alpha)\tau}}{Re(s)-\alpha}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass $Re(s) > \alpha$, gilt für $\tau \to \infty$:

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\int_o^\tau \left|e^{-st}f(t)\right| \mathrm{d}t \le \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{M}{Re(s)-\alpha} - \underbrace{\frac{Me^{-(x-\alpha)\tau}}{Re(s)-\alpha}}_{\to 0}\right) \le \frac{M}{Re(s)-\alpha}.$$

Also konvergiert die Laplace-Transformation (absolut) für $Re(s) > \alpha$. □

Bemerkung: Aus der absoluten Konvergenz von der komplexen Funktion F(s) in einer rechten Halbebene der s-Ebene lässt sich eine wichtige Eigenschaft entnehmen, die den Umgang mit Laplace-Transformationen vereinfacht. Diese Eigenschaft ist im folgenden Satz beschrieben.

3.3 Satz (Holomorphie):

Sei $f(t)$ stückweise stetig auf $[0,\infty[$ und von exponentiellem Wachstum mit Rate höchstens $\alpha > 0$. Dann ist $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ holomorph für $Re(s) > \alpha$.

Beweis. Der Beweis folgt mit den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Ein Satz aus der Funktionentheorie besagt, dass f mit $f = u + iv$ genau dann holomorph ist, wenn für die reell differenzierbaren Funktionen u, v die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$ gelten.
Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f reell ist. Für $s = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-xt}e^{-iyt}f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-xt}f(t)(\cos yt - i\sin yt)\mathrm{d}t \\ &= \int_o^\infty e^{-xt}f(t)cos(yt)\mathrm{d}t + i\int_0^\infty -e^{-xt}f(t)\sin yt\mathrm{d}t \\ &= u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{-xt}cosytf(t)\mathrm{d}t, \int_0^\infty \frac{d}{dy} - \sin yte^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$$

gleichmäßig konvergieren (möchte ich hier nicht beweisen) und deshalb folgende Rechnung durchführen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u(x,y) &= \int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{-xt}\cos ytf(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty -te^{-xt}\cos ytf(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dy}(-sinyte^{-xt}f(t))\mathrm{d}t = \frac{d}{dy}v(x,y)\end{aligned}$$

Ananlog gilt $\frac{d}{dy}u(x,y) = -\frac{d}{dx}v(x,y)$. Also ist$F(s)$holomorph. □

Bemerkung: Die Umformung der Zeitfunktion in eine holomorphe Funktion erlaubt die Anwendung von leistungsfähigen Methoden der Funktionentheorie wie den Cauchy Integralsatz oder den Residuensatz. Dadurch erhält man Erkenntnisse über die holomorphe Funktion und kann daraus Rückschlüsse auf die Zeitfunktion ziehen.

3.4 Satz (Linearität):

Die Laplace-Transformation einer Summe von zwei laplace-transformierbaren Funktionen f, g mit Konvergenz für f mit $Re(s) > \alpha$ und Konvergenz für g mit $Re(s) > \beta$ konvergiert für $Re(s) > \max(\alpha, \beta)$ und lautet

$$\mathscr{L}\{K_1 f(t) + K_2 g(t)\} = K_1 F(s) + K_2 G(s), \text{ für Konstanten } K_1, K_2 \in \mathbb{C}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{K_1 f(t) + K_2 g(t)\} &= \int_0^\infty [K_1 f(t) + K_2 g(t)]\, e^{-st}\mathrm{d}t\\ &= K_1 \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + K_2 \int_0^\infty g(t)e^{-st}\mathrm{d}t\\ &= K_1 F(s) + K_2 G(s), \text{ für } Re(s) > \max(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

□

3.5 Satz (1. Verschiebungssatz):

$$F(s+a) = \mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\}$$

Beweis.

$$F(s+a) = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\}$$

□

3.6 Satz (2. Verschiebungssatz):

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\} = e^{-sa}F(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\mathrm{d}t = \int_{-a}^\infty e^{-s(\xi+a)}f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^\infty e^{-s\xi}e^{-sa}f(\xi)\mathrm{d}\xi = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi = e^{-sa}F(s)\end{aligned}$$ □

3.7 Satz (Differentiation für die Originalfunktion):

Sei die Funktion f stetig auf $[0,\infty[$ und von exponentiellem Wachstum mit Rate höchstes $\alpha > 0$. Sei weiter f' stückweise stetig auf $[0,\infty[$. Dann gilt:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0+)$$

Allgemein gilt:

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f^{(1)}(0+) - \cdots - s^{n-n}f^{(n-1)}(0+)$$

Beweis. Laut Definition 2.1 gilt

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\mathrm{d}t$$

Mit partieller Integration für $u = e^{-st}, du = -se^{-st}, dv = f'(t), v = f(t)$ folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to0+}\lim_{\tau\to\infty}\int_\delta^\tau e^{-st}f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\delta\to0+}\lim_{\tau\to\infty}(\Big[e^{-st}f(t)\Big]_{t=\delta}^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st}f(t)\mathrm{d}t) \\ &= \lim_{\delta\to0+}\lim_{\tau\to\infty}(e^{-st}f(\tau) - e^{-s\delta}f(\delta) + s\int_\delta^\tau e^{-st}f(t)\mathrm{d}t) \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0+)\end{aligned}$$

für $Re(s) > \alpha$

Beweis für die allgemeine Formel folgt aus einer Erweiterung des Beweises für die erste Ableitung. □

Bemerkung Der Satz über die Transformation von Ableitungen ist sehr hilfreich zur Bestimmung von neuen Laplace-Transformationen. Wenn zum Beispiel $F(s)$ von $f(t) = \sin t$ bekannt ist kann man leicht $F(s)$ für $f(t) = \cos t$ berechnen. Außerdem wird die unter Umständen schwierige Operation der Differentiation in eine Operation aus Multiplikation und Subtraktion umgewandelt.

3.8 Satz (Differentiation für die Bildfunktion):

Die Differentiation der Transformation einer Funktion f(t) entspricht der Multiplikation der Funktion f(t) mit -t. Also

$$F^{(n)} = \mathscr{L}\{(-t)^n f(t)\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beweis. Beweis für $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{L}\{(-t)f(t)\} \end{aligned}$$

$(*)$: $F(s)$ konvergiert absolut für $Re(s) > \alpha$ □

3.9 Satz (Faltungssatz)

Seien $f(t), g(t)$ für $t \in [0, \infty[$ stückweise stetige Funktionen von exponentiellem Wachstum mit der Rate höchstens $\alpha > 0$. Bezeichne

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(u)g(t-u)\mathrm{d}u$$

die Faltung von f mit g. Dann gilt:

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} \ f\text{ür } Re(s) > \alpha$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{(f * g)(t)\} &= \mathscr{L}\{\int_0^\infty f(u)g(t-u)\mathrm{d}u\} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)g(t-u)\mathrm{d}u\right] e^{-st}\mathrm{d}t \ = \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u \int_0^\infty g(t-u)e^{-st}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Mit Substitution durch $\xi = t - u$ und $dt = d\xi$ folgt

$$= \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u \int_{-\tau}^\infty g(\xi)e^{-s(\xi+u)}\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u \int_{-\tau}^\infty g(\xi)e^{-s\xi}e^{-su}\mathrm{d}\xi.$$

Da f eine Zeitfunktion mit $f(\xi) = 0$ für $\xi < 0$ ist können die Grenzen des zweiten Integrals geändert werden

$$= e^{-su} \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u \int_0^\infty g(\xi)e^{-s\xi}\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty f(u)e^{-su}\mathrm{d}u \int_0^\infty g(\xi)e^{-s\xi}\mathrm{d}\xi = F(s)G(s)$$

$\square$

4 Inverse Laplace-Transformation

Die Zuordnung einer Zeitfunktion f(t) zu einer komplexen Funktion F(s) heißt Laplace-Transformation. Der umgekehrte Weg, eine Rücktransformation von einer als vorausgesetzten Funktion F(s) aus dem Bildbereich in den Originalbereich zur Berechnung der Funktion f(t), wird Inverse Laplace-Transformation genannt. In der Praxis geschieht dies meist mithilfe von Transformationstabellen, die für spezielle F(s) zugehörige f(t) angeben. Allerdings kann man die Originalfuntion auch auf direktem Wege mittels einer Umkehrformel ausrechnen.

4.1 Bezeichnung:

Für die Rücktransformation vom Bildbereich in den Originalbereich werden folgende Symbole benutzt

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ oder } F(s)\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ f(t)$$

Bemerkung Wie oben schon beschrieben lässt sich mithilfe von Beispiel 2.3.2 $\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$ die Umkehrfunktion von rationalen Funktionen mit einfachen Nullstellen bestimmen. Wenn man zudem Satz 3.8 hinzuzieht lassen sich Umkehrfunktionen von allgemeinen rationalen Funktionen bestimmen.

4.2 Beispiele:

1. Sei
$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s+i)(s-i)}$$
mit den zwei einfachen Nullstellen $s = i$ und $s = -i$. Mit Partialbruchzerlegung soll gelten
$$\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+i} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-i}$$

Wendet man nun die Inversion an erhält man unter Verwendung von 2.3.2 folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s+i}\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-i}\} \\ &= \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) = \cos t\end{aligned}$$

2. Sei

$$F(s) = \frac{2s-1}{(s-1)^2}$$

mit doppelter Nullstelle $s = 1$ Dann erhält man mit Partialbruchzerlegung

$$\frac{2s-1}{(s-1)^2} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Wendet man nun die Inversion an ergibt sich

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{s-1}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}$$

mit Satz 3.8 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\} = \mathscr{L}^{-1}\{(\frac{-1}{s-1})'\} = \mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} \\ \overset{\text{Satz}}{=} \mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{(-t)f(t)\}\} \overset{\mathrm{F(s)}\bullet\!\!-\!\!\circ -\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{=} \mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{(-t)(-e^t)\}\} \\ = te^t\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man jetzt

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\} = 2e^t + te^t = (2+t)e^t$$

4.3 Satz (Inversionssatz):

Sei f stetig und f' stückweise stetig auf $[0, \infty[$. Sei f dort von exponentiellem Wachstum mit der Rate höchstens $\alpha > 0$. Für $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ gelte für $Re(s) > \alpha$ und $x > \alpha$ die Inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)\mathrm{d}s$$

ist zusätzlich $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)e^{-st}\mathrm{d}s = 0$, γ linker Halbkreis um x so gilt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} Res(z_k),\ t \geq 0,$$

wobei $Res(z_k)$ das Residuum der Funktion $e^{st}F(s)$ am Punkt $s = z_k$ für endlich viele Punkte zk ist.

Beweis. 1. Da F(s) für $Re(s) > \alpha$ holomorph ist (Satz 3.3) gilt mit der Cauchy-Integralformel

$$2\pi i F(s) = \int_c \frac{F(z)}{z-s} \mathrm{d}z$$

Die Kurve W wählt man so, dass sie s einmal umläuft und innerhalb des Holomorphiegebietes bleibt. Dazu konstruiert man c aus der Geraden von $x + iR$ nach $x - iR$ und den rechten Halbkreis um x mit dem Radius R. Man beachte, dass $x \in \mathbb{R}$ mit $Re(s) > x > \alpha$ ist. Das Kurvenintegral lässt sich nun in die Teilwege - Gerade von $x + iR$ nach $x - iR$ und Halbkreis - aufteilen. $F(z)$ verschwindet auf dem Halbkreis für $R \to \infty$. Deshalb liefert das Integral über den Halbkreis keinen Beitrag und man erhält

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+iR}^{x-iR} \frac{F(z)}{z-s} \mathrm{d}z = \int_{x-iR}^{x+iR} \frac{F(z)}{s-z} \mathrm{d}z$$

Mit dem Satz von Fubini und dem Beispiel 2.3.2 folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} \frac{F(z)}{s-z} \mathrm{d}z\} \\
\iff f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-z}\} F(z) \mathrm{d}z \\
\iff f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} e^{st} F(z) \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

2. Für den Beweis der Residuenformel benötigt man einen geschlossenen Integrationsweg, der alle Polstellen z_k von $e^{st}F(s)$ umschließt. Diese entsprechen den Polstellen von $F(s)$, weil e^{st} selbst keine Pole im Endlichen besitzt. Da $F(s)$ für $Re(s) > \alpha$ holomorph ist, befinden sich die Polstellen links von dem Holomorphiegebiet. Der Integrationsweg I wird wie folgt festgelegt: Er umfasst die Gerade von $x - iR$ nach $x + iR$ und den linken Halbkreis γ um $x, x \in \mathbb{R}$. Jetzt liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_I F(s) e^{st} \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} F(s) e^{st} \mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(s) e^{st} \mathrm{d}s \quad = \sum_{k=1}^{n} Res(z_k)$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{R \to \infty} \int_\gamma F(s) e^{st} \mathrm{d}s = 0.$$

geht die obige Gleichung in die komplexe Umkehrformel über. □

5 Literaturverzeichnis

[1] O. Föllinger, Laplace-, Fourier- und z-Transformation, VDE Verlag, 2011

[2] B. Forster, Fourier- und Laplace-Transformation, Vorlesungsskript TU München

[3] L.Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, Vieweg Verlag, 2007

[4] A.D. Poularikas (ed), The Transforms and Application Book, CRC Press, 2000
5. A.D. Poularikas und S. Seely, Laplace Transforms

[5] H. Weber, Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik, 7. Auflage, Teubner Verlag, 2003