

# Integraltransformationen

## 2-Fach-Bachelor-Seminar in Mathematik

Wintersemester 2012/13

Integraltransformationen liefern umkehrbare Abbildungen

$$f(x) \mapsto \hat{f}(x) := \int dy K(x, y) f(y)$$

zwischen Räumen von Funktionen, die durch einen geeigneten Integralkern  $K(x, y)$  definiert werden. Dadurch gelingt es in vielen Fällen, Problemstellungen zu gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen oder Integralgleichungen, die im Originalraum schwierig sind, in ein deutlich einfacheres Problem im Bildraum zu überführen. Gelingt im Bildraum die Lösung, so liefert die Umkehrabbildung eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Im Seminar sollen die wichtigsten Klassen von Integraltransformationen wie Fourier-, Laplace-, Mellin-, Hilbert-, Hankel- und Mehler-Fock-Transformation vorgestellt werden. Dabei geht es sowohl um die mathematische Behandlung der jeweiligen Transformation, als auch um typische Anwendungen.

Unser Ziel ist die Klärung folgender Fragen für die jeweilige Transformation:

- Um welchen Integralkern handelt es sich?
- Für welche Funktionenräume ist das Integral erklärt?
- Welche Eigenschaften hat die Transformation?
- Wie sieht die Rücktransformation aus?
- Welche typischen Probleme lassen sich behandeln?

Dabei geht es in erster Linie nicht um eine Sammlung von Formeln und Methoden, sondern um ein gewisses Verständnis dafür, weshalb diese Formeln gelten und die Methoden funktionieren.

Leider war keine perfekte Literaturvorlage zu finden. Viele Bücher sind entweder auf Ingenieurwissenschaften zugeschnitten, oder sie sind mathematisch zu umfangreich. Ein wesentlicher Teil der Vortragsvorbereitung wird deshalb in einer kritischen Sichtung der Literatur bestehen.

## Seminarplan

### 1. Lebesgue-Integral und $L^p$ -Räume

Definition (nur im  $\mathbb{R}^1$ ), Vollständigkeit, Konvergenzsätze, Transformationssatz,  $L^p$ -Räume, Höldersche Ungleichung

Literatur: [5, §7–9], [11, §A, I.1]

2. **Integration im Komplexen**  
Holomorphie, Cauchyscher Integralsatz, Residuensatz  
Literatur: [5, §6]
3. **Fourier-Reihen**  
periodische Funktionen, trigonometrische Polynome, Fourier-Reihen, Konvergenz im quadratischen Mittel, Anwendungen  
Literatur: [4, §16], [6, §2], [2, §3]
4. **Fourier-Transformation I: Grundlagen**  
Definition und Eigenschaften, Umkehrformel, Plancherel-Formel  
Literatur: [6, §3], [2, §4], [8, §2], [7, §2]
5. **Fourier-Transformation II: Anwendungen**  
Beispiellösungen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, Signalverarbeitung  
Literatur: [6, §3], [2, §4, z.T: §5+6], [8, §2], [7, §2], [9, §X+XI]
6. **Laplace-Transformation I: Grundlagen** Definition und Eigenschaften, Beispiele, Umkehrformel  
Literatur: [6, §4], [2, §7], [8, §3], [7, §5]
7. **Laplace-Transformation II: Anwendungen**  
Beispiellösungen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen sowie Integralgleichungen  
Literatur: [6, §4], [1, §4,5,6], [8, §3], [7, §5]
8. **Mellin-Transformation**  
Definition und Eigenschaften, Beispiele, Umkehrformel, Anwendungen  
Literatur: [8, §4], [7, §11], [1, §12+13]
9. **Hilbert-Transformation**  
Konjugierte Funktionen, Randwerte holomorpher Funktionen, Cauchyscher Hauptwert, Riesz-Theorem  
Literatur: [9], [2, §3.5.2], [3]
- 10\* **Bessel-Funktionen**  
Besselsche Differentialgleichung, Reihendarstellungen, Rekursionsformeln, Integraldarstellungen, Auftreten in Differentialgleichungen  
Literatur: [1, §18], [10]
11. **Hankel-Transformation**  
Definition und Eigenschaften, Beispiele, Umkehrformel, Anwendungen  
Literatur: [7, §9], [1, §14], [8, §5]
12. **Mehler-Fock-Transformation**  
Definition und Eigenschaften, Beispiele, Umkehrformel, Anwendungen  
Literatur: [8, §7]

### 13\* Weitere Transformationen

Stieltjes-Transformation, Kontorovich-Lebedev-Transformation,  
Literatur: [12, §VIII ], [1, §15], [8, §6]

### 14\* Weitere Transformationen

Radon-Transformation, Wavelet-Transformation  
Literatur: [7, §10]

## Literatur

- [1] B. Davies, Integral Transforms and Their Applications, Springer-Verlag  
Bibliothek: Numerik
- [2] B. Forster, Fourier- und Laplace-Transformation, Vorlesungsskript TU München,  
[http://www.gm.fh-koeln.de/~afomusoe/SS2012/Mathe/fourier-laplace\\_Skript.pdf](http://www.gm.fh-koeln.de/~afomusoe/SS2012/Mathe/fourier-laplace_Skript.pdf)
- [3] F. W. King, Hilbert Transforms: Vol 1, Cambridge University Press, 2009
- [4] K. Königsberger, Analysis I, Springer-Verlag 2004.
- [5] K. Königsberger, Analysis II, Springer-Verlag 2004.
- [6] A. Pinkus & S. Zafrany, Fourier Series and Integral Transforms, Cambridge University  
Press, 1997.
- [7] A. D. Poularikas (ed), The Transforms and Applications Handbook, CRC Press, 2000
  - 2. K. B. Howll, Fourier Transforms.
  - 5. A. D. Poularikas & S. Seely, Laplace Transforms.
  - 9. R. Piessens, The Hankel Transform.
  - 10. Y Sheng, Wavelet Transform.
  - 11. J. Bertrand, P. Bertrand & J. Ovarlez, The Mellin Transform.
- [8] I. Sneddon, The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, 1972  
Bibliothek
- [9] E. C Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, 1948.  
Bibliothek
- [10] Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1952  
<http://www.archive.org/details/treatiseontheory00watsuoft>  
Bibliothek
- [11] D. Werner, Funktionalanalysis, Springer-Verlag 2007.
- [12] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1946,  
<http://www.archive.org/details/laplacetransform031816mbp>  
Bibliothek