Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis *Dienstag*, den 23.10.2010, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Seien $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$c(t) = (t, t\sin t, t\cos t),\ \ v(x,y,z) = (2yz, x+z, y),\ \ f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2.$$

Berechnen Sie die totalen Differentiale $Dc, Dv, Df, D(v\circ c), D(f\circ v)$.

Aufgabe 2. (a) Sei $m \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad m* in dem Sinne, dass $f(tx) = t^m f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\langle x, (\operatorname{grad} f)(x)\rangle = mf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $g, h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \cos\langle y, x\rangle$ und $h(x) = \sin\langle y,x\rangle$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(\operatorname{grad} g)(x) = -h(x)\,y, \qquad (\operatorname{grad} h)(x) = g(x)\,y,$$
$$(\Delta u)(x) + \|y\|^2 u(x) = 0 \text{ für } u = g, h.$$

Aufgabe 3. Die *Rotation* eines differenzierbaren Vektorfeldes $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v = \big(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2,\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3,\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\big) : U \to \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} v$ für $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \big(\mathrm{e}^{x_1+x_2}, \sin(x_2x_3), x_1+x_3\big)$.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $u, v\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \qquad \operatorname{rot}(fu) = f\operatorname{rot} u + (\operatorname{grad} f)\times u,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot} u = 0, \qquad \operatorname{div}(u\times v) = \langle \operatorname{rot} u, v\rangle - \langle u, \operatorname{rot} v\rangle,$$

wobei $x\times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^t$ für $x, y \in \mathbb{R}^3$.

(*Bemerkung:* Man schreibt auch suggestiv $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ als Vektor von Operatoren und erhält dann symbolisch $\nabla f = \operatorname{grad} f$, $\langle \nabla, f\rangle = \operatorname{div} f$, $\nabla \times v = \operatorname{rot} v$. Dann gilt zum Beispiel $\nabla\times(fu) = (\nabla f)\times u + f(\nabla\times u)$.)

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $Q\colon \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Transformation auf Kugelkoordinaten

$$Q(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

von Blatt 1 sowie $g(r,\theta,\phi) = f(Q(r,\theta,\phi))$. Zeigen Sie:

(a) $$(DQ)^{-1}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r^{-1}\cos\theta\cos\phi & -(r\sin\theta)^{-1}\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r^{-1}\cos\theta\sin\phi & (r\sin\theta)^{-1}\cos\phi \\ \cos\theta & -r^{-1}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}^t,$$

(b) $$(\operatorname{grad} f)\circ Q = \partial_r g\cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}^t + \frac{\partial_\theta g}{r}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}^t + \frac{\partial_\phi g}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}^t.$$