Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 12/13**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 30.10.2010, 12 Uhr in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + x - e^{y_1+2y_2} + e^{y_1+y_2+x} \\ y_1 + y_2 + x + \frac{1}{2}\sin(y_1 + y_2 + x) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $F(x, y_1, y_2) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach y_1 und y_2 aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie das maximale Intervall für x, auf dem die Auflösung in (a) möglich ist.

(c) Bestimmen Sie den Tangentialvektor der Lösungskurve aus (a) an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y) = x + xy + y^2$, und prüfen Sie, ob es sich um globale Extrema handelt.

(b) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i^2 < 1\}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) := \prod_{i=1}^n x_i^2$. Zeigen Sie, dass g kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 3. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x_1, x_2, y) = x_1^4 + 2x_1 \cos x_2 + \sin y = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $G(x_1, x_2, y) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach y aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie für die Auflösung $y(x_1, x_2)$ aus (a) das Taylorpolynom zweiten Grades an der Stelle $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Aufgabe 4. Sei $U := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ und $Q\colon U \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatentransformation, $Q(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $g = f \circ Q$. Zeigen Sie:

(a) $(\partial_1 f)(r\cos\phi, r\sin\phi) = \cos\phi \cdot \partial_1 g(r, \phi) - \frac{\sin\phi}{r} \cdot \partial_2 g(r, \phi)$ und
$(\partial_2 f)(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sin\phi \cdot \partial_1 g(r, \phi) + \frac{\cos\phi}{r} \partial_2 g(r, \phi)$.
(*Hinweis:* Berechnen Sie $(DQ(r, \phi))^{-1}$; siehe auch Blatt 2, Aufgabe 4.)

(b) $(\Delta f)(r\cos\phi, r\sin\phi) = \partial_r^2 g(r, \phi) + \frac{1}{r}\partial_r g(r, \phi) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 g(r, \phi)$.
(*Hinweis:* Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn Sie die Gleichungen aus (a) in folgender suggestiver Kurzform schreiben:

$$\partial_x = \cos\phi \cdot \partial_r - \frac{\sin\phi}{r} \cdot \partial_\phi, \qquad \partial_y = \sin\phi \cdot \partial_r + \frac{\cos\phi}{r} \cdot \partial_\phi.$$

Beachten Sie dabei die Leibniz-Regel!)