

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 16.1.2015 bis 10h00, in den Briefkästen

Blatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^6 + 1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2}, \quad \int_0^{2\pi} dx \frac{\cos(3x)}{5 - 4 \cos x}.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2} = \sqrt{\pi},$$

indem Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} \quad \text{mit} \quad a = e^{\pi i/4} \sqrt{\pi}$$

längs eines Parallelogramms mit den Ecken $-R$, $-R + a$, $R + a$ und R integrieren und danach den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ vollziehen. Benutzen Sie dabei die Identität

$$f(z) - f(z + a) = e^{-z^2}.$$

Aufgabe 4. Sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ genau eine Lösung besitzt, die überdies reell ist. (*Hinweis:* Satz von Rouché)