Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

WS 2014/2015

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 30.1.2015 bis 10h00, in den Briefkästen — Blatt 13

Aufgabe 1. Wir betrachten den homogenen Torus

$$T = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 \leq 1\big\}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Torus.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist der *Flächeninhalt* $A(F(K))$ der Fläche $F(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A(F(K)) = \int_K dx \sqrt{\det((DF)(x)^T(DF)(x))}\;.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel und der Parametrisierung

$$F\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}(4 - \cos\psi)\cos\phi\\ (4 - \cos\psi)\sin\phi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$$

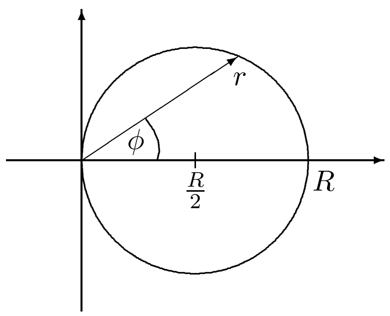
den Oberflächeninhalt des Torus.

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Aufgabe 3, Blatt 12, gegebenen Körpers

$$A := \{(x, y, z) \;:\; (x{-}R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2\,,\; x^2{+}y^2{+}z^2 \leq R^2\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

d.h. die Summe der Zylinderfläche innerhalb der Kugel und der Kugelfläche innerhalb des Zylinders.

Hinweis: Überlegen Sie sich die Parametrisierung der Schnittfläche $z = 0$ in Polarkoordinaten,



Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß $\int_{\mathbb{R}^2} d(x, y)\; \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ konvergiert, und leiten Sie daraus erneut die Formel $\int_{\mathbb{R}} dx\; \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ her.

(b) Folgern Sie

$$\int dx\; \mathrm{e}^{-\|Ax\|^2} = \frac{\pi^{n/2}}{|\det A|}$$

für alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Existiert das Integral auch für $A \in M(n, \mathbb{R})$ mit $\det A = 0$?