Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 15/16**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 12.11.2015, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag von

(a) $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$, (b) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$, (c) $(1+\mathrm{i})^n$, (d) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$.

(*Hinweis:* Gegebenenfalls sind Polarkoordinaten nützlich.)

Aufgabe 2. Die Normalform einer kubischen Gleichung ist $z^3+pz+q=0$ mit $p,q\in\mathbb{R}$.

(a) Rechnen Sie nach, dass für $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u+v\,, \qquad z_2 = \Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u + \Big(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v,$$
$$z_3 = \Big(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u + \Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v$$

mit

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\,, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a<0$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen von $z^3+6z+2=0$.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $\{z\in\mathbb{C} : |z-1| \le |\mathrm{i}z-1|\}$, (b) $\{z\in\mathbb{C} : 0 < |z-1-\mathrm{i}| \le 1\}$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die auf der Rückseite beschriebene Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal. Zeigen Sie:

(a) Die Länge $h := |0H|$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, also $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n=1,2,3,4$, sind gegeben durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

(*Hinweis:* Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1-h$.)

(c) (Zusatzaufgabe, 2 Zusatzpunkte) Es gilt $z_1^n = z_n$ für $n=2,3,4$ und $z_1^5=1$.
(*Hinweis:* Es genügt, $z_1^2=z_2$, $z_2^2=z_4$, $z_1z_4=1$ zu zeigen — warum?)

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal

1. Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.

2. Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.

3. Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.

4. Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.

5. Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann sind (A, A_1, A_2, A_3, A_4) die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.