Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 15/16**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 17.12.2015, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Reihen:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)}$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$ (d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Hinweis: In (c)+(d) führt Ergänzen zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ zum Ziel.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} z^n$$ (b) $$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) $$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$$ (d) $$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n!}}{2^n} z^n$$

Aufgabe 3. (a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweisen Sie folgendes *Verdichtungskriterium*: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie mittels (b) die bereits bekannte Eigenschaft, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, mit $s \in \mathbb{Q}$, genau für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Aufgabe 4. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. Beweisen Sie:

(a) Der Konvergenzradius von f ist ∞.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $2f(z) \cdot f(z) = 1 + f(2z)$.

Hinweis: Ergänzen Sie den in der Doppelsumme entstehenden Ausdruck zu $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ und berechnen Sie diese Summe der Binomialkoeffizienten als Funktion von n.