Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 15/16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 21.01.2016, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Gegeben sind die Funktionen $\operatorname{sgn}, \lfloor\cdot\rfloor, \operatorname{zack}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\text{(a)}\quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \qquad \text{(c)}\quad \operatorname{zack}(x) = \left| \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - x \right|.$$

An welchen Stellen sind diese Funktionen jeweils stetig beziehungsweise unstetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie folgende Funktionslimites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{x^2}{(1+x)^2}\right), \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}}.$$

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeigen Sie, daß dann ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = g(x)$.

(b) Sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß dann ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = x$.
Bemerkung: Solch ein x nennt man einen *Fixpunkt* von f.

Aufgabe 4. (a) Sei $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $x \mapsto a^x$, eine Umkehrabbildung $\log_a := f^{-1}\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ besitzt, und daß $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$ für alle $y \in]0, \infty[$.

(b) Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in]-1, 1[$ an.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (b):

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3(2n+1)9^n},$$

$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{5(2n+1)25^n} \right),$$

$$\ln 5 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{9(2n+1)81^n} \right).$$