Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 15/16**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 28.01.2016, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Wir definieren zwei Folgen von Polynomen $(T_n)_n$ und $(U_n)_n$ rekursiv durch

$$T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \qquad T_0(y) = 1, \qquad T_1(y) = y,$$
$$U_{n+1}(y) = 2yU_n(y) - U_{n-1}(y), \qquad U_0(y) = 1, \qquad U_1(y) = 2y.$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(nx) = T_n(\cos x), \qquad \sin(nx) = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\operatorname{artanh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$ für alle $z \in]-1, 1[$.

(c) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta, \alpha+\beta \notin (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi$.

(d) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy > 1$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ für

(a) $f(x) = x^{(x^2)},\ x > 0,$ (b) $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2}),$

(c) $f(x) = \ln(2 + \cos(2x)),$ (d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right).$

Aufgabe 4. Berechnen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4}{\sin(x^2 - x)},$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}.$