

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe bis Donnerstag, den 27.10.16, 12 Uhr in den Briefkästen

Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten die Polarkoordinatentransformation

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \phi) \mapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta).$$

- (a) Geben Sie einen möglichst großen Bereich an, auf dem F injektiv ist.
- (b) Geben Sie (explizit) eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ an mit

$$F(K) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0\}.$$

- (c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $(DF)(r, \theta, \phi)$.
- (d) Berechnen Sie die Determinante $\det((DF)(r, \theta, \phi))$.

Aufgabe 2. Seien $g_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, g_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(u, v, w) := (v + w, u + w, u + v), \quad g_2(t) := (\cos^2 t, \sin^2 t, t^2), \\ f(x, y, z) := z(x + y).$$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Dg_1, Dg_2 und Df .
- (b) Berechnen Sie die $D(f \circ g_1)$ und $D(f \circ g_2)$ *zunächst ohne Kettenregel*.
- (c) Prüfen Sie, daß $D(f \circ g_1)(u, v, w) = (Df)(g_1(u, v, w)) \circ (Dg_1)(u, v, w)$ und $D(f \circ g_2)(t) = (Df)(g_2(t)) \circ (Dg_2)(t)$.

Aufgabe 3. (a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \langle x, x \rangle$. Berechnen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $(D_y f)(x)$, folgern Sie, daß f total differenzierbar ist, und bestimmen Sie die totale Ableitung $(Df)(x)$ als lineare Abbildung. (*Hinweis:* Das Skalarprodukt ist nach Cauchy-Schwarz als Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} stetig.)

- (b) Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, also $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ konstant. Zeigen Sie, daß dann die Beschleunigung $\gamma''(t)$ stets senkrecht zum Impulsvektor $\gamma'(t)$ steht.

Aufgabe 4. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

- (a) Zeigen Sie: Schreiben wir die Funktion $t \mapsto \det(A + tB)$ als Polynom $t \mapsto c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$, so ist $c_0 = \det(A)$, $c_n = \det(B)$ und

$$c_1 = \sum_{k=1}^n \det(D_k),$$

wobei D_k die Matrix bezeichnet, die man aus A erhält, wenn man die k -te Spalte durch die k -te Spalte von B ersetzt. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Multilinearität der Determinante bezüglich der Spalten. Versuchen Sie nicht unbedingt, die Lösung mit Formeln aufzuschreiben; eine saubere schriftliche Argumentation ist hier sinnvoller.)

- (b) Folgern Sie, daß die Richtungsableitung $(D_B \det)(A)$ mit c_1 übereinstimmt.
- (c) Bezeichne E_n die Einheitsmatrix und $\text{Spur}(B)$ die Summe der Diagonaleinträge von B . Folgern Sie, daß $((D \det)(E_n)) \circ B = \text{Spur}(B)$.