Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 16/17**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 30.11.2016, 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. *(Auflösung fester Stoffe)*
Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel L aufgelöst wird, ist proportional zu der noch nicht aufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes.

(a) Zur Zeit $t_0 = 0$ mögen in einem Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Stoffes S eingebracht werden. Die Sättigungskonzentration sei 1/4. Stellen Sie eine DGL für die Menge $u(t)$ des zur Zeit $t > 0$ gelösten Stoffes S (in kg) auf. (Diese wird eine Proportionalitätskonstante k enthalten. Die Konzentration des gelösten Stoffes ist in diesem Modell $u(t)/100$ und *nicht* $u(t)/(100 + u(t))$.)

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Trennung der Variablen. Verwenden Sie dazu eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(10-v)(25-v)} = \alpha\left(\frac{1}{10-v} - \frac{1}{25-v}\right)$$

mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$. (Nur zur Probe: Die Lösung ist $u(t) = 10(1 + \frac{3}{2-5e^{0,15kt}})$.)

(c) In der Lösung tritt noch eine Proportionalitätskonstante k auf. Wie groß ist sie, wenn nach $t = 10$ Minuten eine Lösungskonzentration von 1/20 gemessen wird?

Aufgabe 2. Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_p los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit dem einen Ende im Nullpunkt befestigt, mit dem anderen Ende am Pferd. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter (Relativ-) Geschwindigkeit v_s auf dem Band zu laufen.

(a) Ermitteln Sie den Ort der Schnecke in Abhängigkeit von der Zeit.
(*Zur Kontrolle:* Für den Ort x_s der Schnecke ergibt sich die lineare DGL $x_s'(t) = v_s + x_s(t)\frac{v_p}{tv_p+l}$ mit $x_s(0) = 0$.)

(b) Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Geben Sie den Zeitpunkt davon in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der beiden Tiere und der Länge des Bandes an. (*Hinweis:* An der Langlebigkeit der Tiere bestehe kein Zweifel.)

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) = f(x(t)) = 2x(t)^3, \qquad x(-2) = 1,\ x'(-2) = 1$$

mit dem Potential-Ansatz (siehe Beispiel 10.10 der Vorlesung)

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 + U(x(t)) = \text{const.},\ \text{wobei } U(x) = -\int_{x_0}^{x} ds\, f(s)$$

und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an.

Aufgabe 4. Das Problem der Brachistochrone (Beispiel 7.4 der Vorlesung) führte zu der Differentialgleichung

$$y'(x)^2 - \frac{1}{E^2 y(x)} = -1. \tag{1}$$

Trennung der Variablen führt zu einem Integral, für das kein geschlossener Ausdruck bekannt ist. Eine Parameterdarstellung der Lösungskurve erhält man aber, indem man x als Funktion eines Parameters t auffaßt und $z(t) := y(x(t))$ setzt.

(a) Zeigen Sie, daß aus (1) mit der Annahme $x'(t) = z(t) \neq 0$ folgt:

$$z'(t)^2 + z(t)^2 = \frac{z(t)}{E^2}. \tag{2}$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Kettenregel $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.)

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung (2) für $z'(t) \geq 0$ und $z(0) = 0$ durch Trennung der Variablen.
(*Hinweis:* Schreiben Sie die Integrationsvariable der linken Seite als $\frac{1}{E^2} \sin^2 u$.)

(c) Folgern Sie aus (b) für den Fall $x(0) = 0$:

$$z(t) = \frac{1}{2E^2}(1 - \cos t), \qquad x(t) = \frac{1}{2E^2}(t - \sin t).$$

(*Hinweis:* Additionstheoreme!)