Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 17/18**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 11.1.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $\exp(-x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\zeta \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(\zeta) = f(\zeta + \frac{1}{2})$.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionsgrenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls (ohne die Regel von de l'Hospital):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}\,, \quad p, q \in \mathbb{N}^\times$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp\big((1+x)^3\big) - \exp(1+3x)}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}\left(\frac{3}{x^2+5} + \frac{x}{x^2+1}\right)$

Aufgabe 3. (a) Sei $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $x \mapsto a^x$, eine Umkehrabbildung $\log_a := f^{-1}\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ besitzt, und daß $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$ für alle $y \in]0,\infty[$.

(b) Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in]-1,1[$ an.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (b):

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3(2n+1)9^n},$$

$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{5(2n+1)25^n}\right),$$

$$\ln 5 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{9(2n+1)81^n}\right).$$

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ gilt

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) sowie der für $x \in]-1,1[$ gültigen Reihendarstellung $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} x^{1+2n}$ die folgende schnell konvergierende Reihendarstellung für π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}.$$