Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 17/18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 26.10.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß $n^p - n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch p teilbar ist.

Aufgabe 2. Es sei M eine endliche Menge aus $n \geq 1$ Elementen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ verschiedene injektive=surjektive=bijektive Abbildungen $f : M \to M$.
Bemerkung: Solche Selbstabbildungen nennt man *Permutationen*. Die Zahl der Permutationen entspricht der Menge der verschiedenen n-Tupel, die sich aus der n-elementigen Menge bilden lassen.

(b) Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von M.

(c) M besitzt 2^n verschiedene Teilmengen (einschließlich $\varnothing$ und M selbst).

Aufgabe 3. (a) Für alle $a, b > 0$ ist das *arithmetische, geometrische* beziehungsweise *harmonische Mittel* definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})}.$$

Zeigen Sie, daß gilt:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b), \qquad H(a,b) = A(a,b) \Leftrightarrow a = b.$$

(b) Seien nun $0 < a < b$ fest. Wir definieren $a_1 := a$ und $b_1 := b$ sowie

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} := A(a_n, b_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G(a_n, b_n) = \sqrt{ab}\ , \quad a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n \quad \text{und} \quad |b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{1}{2}|b_n - a_n|\ .$$

Aufgabe 4. Für $0 < a < b$ werden rekursiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ definiert durch

$$a_0 = a\ ,\ b_0 = b\ , \qquad a_n = G(a_{n-1}, b_{n-1})\ , \quad b_n = A(a_{n-1}, b_{n-1})\ ,$$

wobei $G(a,b) := \sqrt{ab}$ bzw. $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ das geometrische bzw. arithmetische Mittel sind.

Beweisen Sie: $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung.

Hinweis: Ein Teil des Beweises besteht darin, $0 < b_n - a_n < \frac{b}{2^n}$ zu zeigen.

Bemerkung: Die in allen Intervallen liegende reelle Zahl heißt das *arithmetisch-geometrische Mittel* von a, b.