Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 9.11.2017 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Supremum und Infimum sowie, falls vorhanden, Maximum und Minimum:

$$\text{(a)} \quad \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}, \qquad \text{(b)} \quad \left\{ 2^{(-1)^n n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Aufgabe 2. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{4+3\mathrm{i}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{3+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2+\sqrt{5}\mathrm{i}} + \frac{1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2-\sqrt{5}\mathrm{i}} \qquad \text{(c)} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}} \right)^n, n \in \mathbb{N}$$

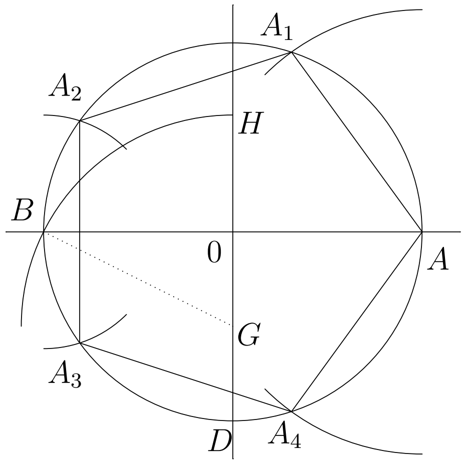
Aufgabe 3. Skizzieren Sie folgende Punktemenge der Gaußschen Zahlenebene:

$$\text{a)} \quad \{ z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{R} \} \qquad \text{b)} \quad \{ z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < |z+1| < 1\,, |z| < |z+\mathrm{i}| \}$$

Aufgabe 4. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal:

- Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.
- Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.
- Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.
- Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.
- Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann beweisen (a),(b),(c): (A, A_1, A_2, A_3, A_4) sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



(a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

(c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2 z_3 = 1$ und $z_1 z_4 = 1$.