

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 16.11.2017 bis 10h00 in den Briefkästen

Blatt 4

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme eine Lösung besitzen und geben Sie diese ggf. an.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{l} x + 2y - 4z = -4, \\ 5x + 11y - 23z = -22, \\ 3x - 2y + 12z = 11, \end{array} \\ \text{(b)} & \begin{array}{l} (1 + i)x + y = 3, \\ (2 - i)x + iy = 1 - i \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie: (v_1, v_2, v_3) ist Basis des \mathbb{R}^3 .
- (b) Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $w = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$.
- (c) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_3)$?

Aufgabe 3. Welche der folgenden Teilmengen V_1, \dots, V_4 des \mathbb{R}^3 ist ein Untervektorraum?

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, & V_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 0\}, \\ V_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 5\}, & V_4 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 0\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, und *schief-symmetrisch*, falls $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

- (a) Zeigen Sie, daß alle symmetrischen bzw. alle schief-symmetrischen Matrizen je einen Untervektorraum von $M(n \times n, K)$ bilden, und bestimmen Sie dessen Dimension.
- (b) Zeigen Sie, daß es für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ genau eine symmetrische Matrix A_+ und eine schief-symmetrische Matrix A_- gibt mit $A = A_+ + A_-$.