Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 30.11.2017 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung von $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n}\right)\,, \qquad a > 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+1}\right)\,, \qquad a > 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

Aufgabe 2. Prüfe, ob die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(d_n)_n$, gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \qquad b_n = \sqrt[n]{3^n + (-2)^n}, \qquad c_n = \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3}, \qquad d_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$

konvergieren, und bestimme im Konvergenzfall den Grenzwert.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Folge der endlichen Kettenbrüche

$$x_n := \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1}}}}}_{n \text{ Bruchstriche}}$$

gegen den *goldenen Schnitt* $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert, indem Sie die Gleichungen $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ verwenden und induktiv $|x_{n+1} - \Phi| \leq \Phi^{-(n+2)}$ zeigen.

Aufgabe 4. (Beweis von $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$ für $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$) Zeigen Sie schrittweise:

(a) Die Folge $\left((1+\frac{r}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times,\, n>-r}$ ist für alle $r \in \mathbb{R}^\times$ monoton wachsend.

(b) Für $p, q \in \mathbb{N}^\times$ sind $\left((1+\frac{p}{qn})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ und $\left((1-\frac{p}{qn})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times,\, qn>p}$ beschränkt.

(c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n = \sqrt[q]{e^p}$ für $p, q \in \mathbb{N}^\times$. *Hinweis:* Teilfolgen

(d) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{p}{qn})^n = \frac{1}{\sqrt[q]{e^p}}$ für $p, q \in \mathbb{N}^\times$.