Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 17/18**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 7.12.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Prüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} \quad (a>0), \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^n, \qquad k \in \mathbb{N}^{\times}$

(b) Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-4\mathrm{i}}{7}\right)^n$

(c) die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{N}^{\times}$ teilerfremd, welche dem periodischen Dezimalbruch $0,\overline{615384}$ entspricht. *Hinweis*: $999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende Reihen durch geschicktes Ergänzen zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Aufgabe 4. (a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweisen Sie folgendes *Verdichtungskriterium*: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie mittels (a), daß $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, mit $s \in \mathbb{Q}$, genau für $s>1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.